АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
СИБИРСКИЙ ИНСТИТУТ ЗЕМНОГО МАГНЕТИЗМА,
ИОНОСФЕРЫ И РАСПРОСТРАНЕНИЯ РАДИОВОЛН

ИССЛЕДОВАНИЯ

ПО ГЕОМАГНЕТИЗМУ, АЭРОНОМИИ И ФИЗИКЕ СОЛНЦА

Выпуск 57

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

(Отдельный оттиск)

ИЗДАТЕЛЬСТВО „НАУКА"
Москва · 1981

ния (9) также следует, что функция $H_n(x)$ имеет те же корни, что и $H'_{n-1}(x)$, и, кроме того, один корень $x = 0$, т.е. число отрицательных корней функции $H_n(x)$ равно $n+1$. Следовательно, согласно (8) функция $F_n(x)$ имеет n действительных различных отрицательных корней.

Если $\alpha_0 = 0$, то доказательство леммы проводится аналогично. В этом случае каждый из полиномов $F_n(x)$, $n = 1,2,\ldots$ оудет иметь один корень, равный нулю. Таким образом, при $\alpha_0 \geq 0, q > 0$ $F_n(x)$ имеет n различных, действительных неположительных корней. Лемма доказана, а значит, установлена асимптотическая нормальность расоматриваемого распределения.

Литература

1. Harper L. - Ann.Math.Stat., 1967, v.38, N 2, 410.
2. Докин В.Н. - В кн.: Исследования по геомагнетизму, аэрономии и физике Солнца . М.: Наука, 1979, вып.49, 202.
3. Колокольникова Н.А., Манилова Л.А. - В кн.: Исследования по геомагнетизму, аэрономии и физике Солнца. М.: Наука, 1979, вып.49, 216.
4. Сачков В.Н. Вероятностные методы в комбинаторном анализе. М.: Наука, 1978.

Иркутский государственный университет им.А.А.Жданова

Статья поступила в январе 1981 г.

УДК 530.145

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ В КЛАССЕ ЮКАВСКИХ ПОТЕНЦИАЛОВ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ УГЛОВЫХ МОМЕНТАХ

С.Э.Коренблит, Ю.В.Парфенов

THE INVERSE SCATTERING PROBLEM FOR YUKAWA POTENTIALS FOR ARBITRARY ANGULAR MOMENTA,

by S.E.Korenblit, Yu.V. Parfenov

Equations to solve the problem of the reconstruction of the potential from the S-matrix discontinuity for the arbitrary complex angular momentum are obtained. For this purpose the generalization of the parametric Jost solution of the Schrödinger equation is introduced. Its additional parameter determines the off-shell partial amplitude.

Большинство полученных до сих пор результатов, касающихся восстановления юкавского потенциала по скачку S матрицы на левом разрезе, ограничивается случаем S волны. Для высших парциальных волн отмечалась лишь принципиальная возможность решения этой задачи, доказанная Мартеном /1/. Важность получения наиболее простых решений этой задачи следует хотя бы из того известного факта, что по скачку S матрицы на левом разрезе однозначно определяется как непрерывный, так и дискретный спектр оператора радиального уравнения Шредингера /1-3/.

В настоящей работе получено уравнение на решение Йоста для произвольных комплексных значений углового момента, ядро которого связано со скачком S матрицы. При этом используется обобщение понятия параметрического решения Йоста, впервые введенного в работах /4-7/ для s-волны. Как показано в этих работах, параметрическое решение для уравнения Шредингера позволяет объединить на первый взгляд различные методы Мартена /8/, Корниля /9/ и Калоджеро и Кокса /10/, а сам по себе этот подход допускает обобщение на уравнения произвольного порядка /7/. В работе показано, что дополнительный параметр, определяющий параметрическое решение Йоста, связан с определенным способом выхода за энергетическую поверхность.

Решение Йоста уравнения Шредингера

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}-\frac{z^2}{4}-\frac{\lambda^2-\frac{1}{4}}{r^2}-U(r)\right)f(\lambda,z,r)=0, \tag{1}$$

$z=2ik$, k - волновое число; $\lambda=\ell+\frac{1}{2}$, ℓ - угловой момент; определяемое условием на бесконечности:

$$\lim_{r\to\infty} e^{\pm\frac{zr}{2}} f(\lambda,\pm z,r)=1 \tag{2}$$

для юкавских потенциалов

$$U(r)=\int_m^\infty \frac{e^{-\mu r}}{r}\, d\sigma(\mu), \tag{3}$$

$$\int_m^\infty \frac{|d\sigma(\mu)|}{\mu} < N < \infty, \tag{4}$$

с $m>0$, при физических (полуцелых) значениях λ удовлетворяет интегральному уравнению Фредгольма:

$$f(\lambda,z,r)=f_0(\lambda,z,r)+2\int_m^\infty \frac{dt}{t}\,\Phi_\lambda(-t)\,\frac{W\{f_0(\lambda,t,r);f_0(\lambda,z,r)\}}{t^2-z^2}\,f(\lambda,z,r), \tag{5}$$

вследствие чего потенциал (3) может быть представлен в виде

$$U(r)=-\frac{d}{dr}\int_m^\infty \frac{dt}{t}\,\Phi_\lambda(-t)\,f(\lambda,t,r)\,f_0(\lambda,t,r). \tag{6}$$

Здесь f_0 - решение свободного $(U(r)=0)$ уравнения Шредингера, удовлетворяющее условию (2); W - вронскиан:

$$W\{f(\lambda,z,r),f(\lambda,\mp z,r)\}=\begin{cases} z \\ 0 \end{cases}, \tag{7}$$

где

$$f(\lambda,-z,r)\equiv f(\lambda,e^{-i\pi}z,r). \tag{8}$$

Функция $\Phi_\lambda(z)$ пропорциональна скачку S-матрицы при целых значениях ℓ:

$$(-1)^\ell\,\frac{\Phi_\lambda(z)}{z}=\Delta\Big/_{z<-m} S(\lambda,z)\equiv\frac{1}{2\pi i}\left[S(\lambda,z+i0)-S(\lambda,z-i0)\right]. \tag{9}$$

S-матрица определяется для любых z и $Re\,\lambda>0$ отношением двух функций Йоста:

$$S(\lambda,z)=\frac{E_\lambda(z)}{E_\lambda(-z)}, \tag{10}$$

которые связаны с решением Йоста следующим равенством:

$$E_\lambda(z)=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}\lim_{r\to 0}\left(\frac{zr}{4}\right)^{\lambda-\frac{1}{2}} f(\lambda,z,r). \qquad (11)$$

Уравнение (5) и равенство (6) решают задачу восстановления потенциала по скачку парциальной S - матрицы на левом разрезе. Ниже будет показано, что уравнение (5), а следовательно, и (6) справедливы при любых комплексных значениях λ. В этом случае из равенств (5), (10) и (11) можно убедиться, что $\Phi_\lambda(z)$ пропорциональна скачку приведенной парциальной амплитуды

$$A(\lambda,z)=e^{i\pi(\lambda-1/2)}\left(\frac{4}{z^2}\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}\frac{1}{z}\left[S(\lambda,z)-1\right], \qquad (12)$$

$$\Delta\Big|_{z<-m} A(\lambda,z)=\left(\frac{4}{z^2}\right)^{\lambda+\frac{1}{2}}\frac{\Phi_\lambda(z)}{4},$$

определенному для любых λ /11/.

Параметрическое решение Йоста

Параметрическое решение Йоста при произвольных значениях ℓ вводится так же, как в случае $\ell=0$. Следуя /4/, будем исходить из интегрального уравнения

$$f(\lambda,z,r)=f_0(\lambda,z,r)+\int_r^\infty d\xi\, G_\lambda(z,r,\xi)U(\xi)f(\lambda,z,\xi),$$

$$G_\lambda(z,r,\xi)=\frac{1}{z}\left[f_0(\lambda,z,r)f_0(\lambda,-z,\xi)-f_0(\lambda,z,\xi)f_0(\lambda,-z,r)\right]. \qquad (13)$$

Заметим, что имеют место два равенства: $\left(Re(\alpha+z)>0\right)$

$$\int_r^\infty d\xi\, G_\lambda(z,r,\xi)f_0(\lambda,z+2\alpha,\xi)=\frac{f_0(\lambda,z+2\alpha,r)}{\alpha(\alpha+z)}, \qquad (14)$$

$$U(r)f_0(\lambda,z+2\beta,r)=\int_{\beta+m}^\infty d\alpha\, \varkappa_\lambda(z,\alpha,\beta)f_0(\lambda,z+2\alpha,r), \qquad (15)$$

где ядро $\varkappa_\lambda(z,\alpha,\beta)$ имеет вид:

$$\varkappa_\lambda(z,\alpha,\beta)=\theta(\alpha-\beta-m)\int_m^{\alpha-\beta} d\sigma(\mu)P_{\lambda-\frac{1}{2}}\left[\frac{(z+2\alpha)^2+(z+2\beta)^2-4\mu^2}{2(z+2\alpha)(z+2\beta)}\right], \qquad (16)$$

первое из них проверяется подстановкой в свободное уравнение Шредингера, второе следует из (61) и (3). Итерируя (13) с учетом (14) и (15), получаем:

$$f(\lambda,z,r)=f_0(\lambda,z,r)+\int_m^\infty \frac{d\alpha\,\varkappa_\lambda(z,\alpha,0)}{\alpha(\alpha+z)}\Big[f_0(\lambda,z+2\alpha,r)+$$

$$+\sum_{n=1}^\infty\prod_{k=1}^n\left\{\int_{\nu_{k-1}+m}^\infty\frac{d\nu_k\,\varkappa_\lambda(z+2\alpha,\nu_k,\nu_{k-1})}{(\nu_k+\alpha)(\nu_k+\alpha+z)}\right\}f_0(\lambda,z+2\alpha+2\nu_n,r)\Big], \qquad (17)$$

Здесь $\nu_0 = 0$. Определим рядом, стоящим в квадратных скобках, функцию четырех переменных - параметрическое решение Йоста:

$$F(\lambda, r; \alpha, \alpha+z) \equiv F(\lambda, r; x, y).$$

Непосредственно из определения следует интегральное уравнение

$$F(\lambda, r; x, y) = f_0(\lambda, x+y, r) + \int_m^\infty \frac{d\alpha\, \varkappa_\lambda(x+y, \alpha, 0)}{(\alpha+x)(\alpha+y)} F(\lambda, r; x+\alpha, y+\alpha). \tag{18}$$

Из этого уравнения следуют симметрия параметрического решения Йоста по переменным x, y и формальная связь его с решением Йоста:

$$f(\lambda, z, r) = F(\lambda, r; z, 0), \tag{19}$$

которая будет доказана ниже. Можно убедиться, что решение этого уравнения эквивалентно частному решению неоднородного дифференциального уравнения:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{(x-y)^2}{4} - \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{r^2} - U(r)\right) F(\lambda, r; x, y) = xy f_0(\lambda, x+y, r), \tag{20}$$

откуда следует интегральное уравнение по переменной r:

$$F(\lambda, r; x, y) = f_0(\lambda, x+y, r) + \int_r^\infty d\xi\, G_\lambda(x-y, r, \xi) U(\xi) F(\lambda, \xi; x, y). \tag{21}$$

По аналогии с (II) введем параметрическую функцию Йоста:

$$E_\lambda(x, y) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} \lim_{r \to 0} \left[\frac{(x+y)r}{4}\right]^{\lambda - \frac{1}{2}} F(\lambda, r; x, y), \tag{22}$$

которая переходит в функцию Йоста (II) при $y = 0$, $x = z$. Отсюда из уравнения (I8) получаем уравнение для $E_\lambda(x, y)$:

$$E_\lambda(x, y) - 1 = \int_m^\infty \frac{d\alpha\, \varkappa_\lambda(x+y, \alpha, 0)}{(\alpha+x)(\alpha+y)} \left(\frac{x+y}{x+y+2\alpha}\right)^{\lambda - \frac{1}{2}} E_\lambda(x+\alpha, y+\alpha) =$$

$$= \sum_{n=1}^\infty \prod_{k=1}^n \left\{ \int_{\nu_{k-1}+m}^\infty \frac{d\nu_k\, \varkappa_\lambda(x+y, \nu_k, \nu_{k-1})}{(\nu_k + x)(\nu_k + y)} \right\} \left(\frac{x+y}{x+y+2\nu_n}\right)^{\lambda - \frac{1}{2}}. \tag{23}$$

Рассмотрим в полосе $|\mathrm{Re}\, x| < m$; $|\mathrm{Re}\, y| < m$ выражение

$$T_\lambda^\pm(x+y, x-y) = \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{\lambda - \frac{1}{2}} \frac{E_\lambda(x, y) - E_\lambda(-x, -y)}{2i\, E_\lambda(\mp(x-y))}, \tag{24}$$

где

$$E_\lambda(-x, -y) \equiv E_\lambda(e^{-i\pi} x, e^{-i\pi} y). \tag{25}$$

Это равенство при $y = 0$, $x - z$ определяет амплитуду рассеяния (см.(I0)): $T_\lambda(z) = S(\lambda, z) - 1$. Покажем, что выражение (24) совпадает с амплитудой вне энергетической поверхности, определяемой уравнением Липпмана-Швингера /2/. Можно показать, что для параметрической функции Йоста существует представлени

$$E_\lambda(x,y)=1+\frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(\lambda+1)}\left(\frac{x+y}{4}\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}\int_0^\infty dr\,\varphi(\lambda,x-y,r)U(r)f_0(\lambda,x+y,r), \tag{26}$$

где $\varphi(\lambda,z,r)$ – регулярное решение уравнения Шредингера:

$$\lim_{r\to 0} r^{-\frac{1}{2}-\lambda}\varphi(\lambda,z,r)=1\ . \tag{27}$$

Выражение (26) получается рассмотрением интегрального уравнения на φ с помощью равенств (I4),(I5), формулы 6.52I из /I2/ и связи между φ_0 и f_0 Подставляя соотношение (26) в (24), получим:

$$T_\lambda^{\pm}(\tau,z)=-\frac{\pi\left(\frac{\tau}{4}\right)^{\lambda+\frac{1}{2}}\left(\frac{z}{4}\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}e^{-i\pi\lambda}}{2\Gamma^2(\lambda+1)E_\lambda(\mp z)}\int_0^\infty dr\,\varphi(\lambda,z,r)U(r)\varphi_0(\lambda,\tau,r), \tag{28}$$

что действительно совпадает с определением амплитуды вне энергетической поверхности /2/.

Аналитические свойства параметрического решения Йоста

Итерируя уравнение (I8), представим параметрическое решение Йоста в виде ряда

$$F(\lambda,r;x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}F_n(\lambda,r;x,y), \tag{29}$$

где n – ая итерация имеет вид

$$F_n(\lambda,r;x,y)=\prod_{k=1}^{n}\left\{\int_{\nu_{k-1}+m}^{\infty}\frac{d\nu_k\,\varkappa_\lambda(x+y,\nu_k,\nu_{k-1})}{(\nu_k+x)(\nu_k+y)}\right\}f_0(\lambda,x+y+2\nu_n,r). \tag{30}$$

Здесь при $n=0$ произведение считается равным единице и $\nu_0=0$. Для простоты потребуем существования для потенциала (3) непрерывной неубывающей функции $\rho(\mu)$. такой, что при $\mu\geq 0$

$$|d\sigma(\mu)|\leq d\rho(\mu), \tag{3I}$$

а для нее также выполняется условие (4). Тогда в области

$$|\arg x|\leq\pi-\varepsilon\ ;\ |\arg y|\leq\pi-\varepsilon\ :$$

$$\int_0^\infty\frac{\rho(\alpha)d\alpha}{|\alpha+x||\alpha+y|}\leq\frac{1}{\sin^2\varepsilon}\int_0^\infty\frac{d\rho(\nu)}{\nu}<\frac{N}{\sin^2\varepsilon}\ . \tag{32}$$

Из оценок, приведенных в Приложении В, следует, что для любого вещественного λ, $|\lambda|-1/2=L>0$ в области

$$O_\varepsilon^{\delta}=\{r,x,y:|\arg r|\leq\frac{\pi}{2}-\delta;|\arg x|\leq\pi-\varepsilon;|\arg y|\leq$$
$$\leq\pi-\varepsilon\ ;\ |\arg(x+y)|\leq\pi-\varepsilon\} \tag{33}$$

справедливо неравенство /4/:

$$\left|e^{\frac{x+y}{2}r}F_n(\lambda,r;x,y)\right|\leq C_\lambda\left[\frac{2+|x+y||r|}{|x+y||r|\sin\delta}\right]^L\frac{M_\lambda^n(\varepsilon)}{n!}\left[\int_0^\infty\frac{\rho(\alpha)d\alpha}{|\alpha+x||\alpha+y|}\right]^n. \tag{34}$$

Откуда для ряда (29) имеем равномерную оценку

$$\left| e^{\frac{x+y}{2}r} F(\lambda, r; x, y) \right| \le C_\lambda \left[\frac{2+|x+y||r|}{|x+y||r|\sin\delta} \right]^{L} \exp\left[M_\lambda(\varepsilon) \frac{N}{\sin^2\varepsilon} \right]. \tag{35}$$

С другой стороны, в силу свойств интеграла типа Коши и равенства

$$F_n(\lambda, r; x, y) = \int_m^\infty \frac{d\alpha\, \varkappa_\lambda(x+y, \alpha, 0)}{(\alpha+x)(\alpha+y)} F_{n-1}(\lambda, r; x+\alpha, y+\alpha) \tag{36}$$

можно убедиться по индукции в том, что слагаемое $F_n(\lambda, r; x, y)$ является аналитической функцией трех комплексных переменных r, x, y в области O_ε^δ. В силу равномерной сходимости ряда (29) имеет место теорема.

Т е о р е м а . Параметрическое решение Йоста $F(\lambda, r; x, y)$ для потенциалов, удовлетворяющих условиям (31), (32), является аналитической функцией трех переменных r, x, y в области O_ε^δ при любом вещественном $\lambda \neq \infty$.

Из приведенных оценок (32) и (35) нетрудно убедиться также в существовании предела (22). Кроме того, если x и r фиксированы в области аналитичности O_ε^δ, легко видеть /4/, что существует предел (19)

$$\lim_{y\to 0} F(\lambda, r; x, y) = f_0(\lambda, x, r) + \int_m^\infty \frac{d\alpha\, \varkappa_\lambda(x, \alpha, 0)}{\alpha(\alpha+x)} F(\lambda, r; x+\alpha, \alpha). \tag{37}$$

Таким образом, аналитические свойства введенных выше функций являются простым следствием аналитичности параметрического решения Йоста. Пусть r и y фиксированы в области аналитичности. Тогда параметрическое решение Йоста является однозначной аналитической функцией x в комплексной плоскости с двумя разрезами вдоль отрицательной вещественной оси от точек $x=-m$ и $x=-y$. При условии $Im\ y \neq 0$ эти разрезы не имеют общих точек и скачки на них могут быть вычислены непосредственно. В этом проявляется одно из преимуществ параметрического решения Йоста при исследовании аналитических свойств решений уравнения Шредингера.

Рассмотрим скачок на "динамическом" разрезе $-\infty < x < -m$, обусловленный обращением в нуль знаменателей $(\nu + x)$ в выражениях (18) и (30). Учитывая, что в силу условия $m > 0$ одновременное обращение в нуль двух и более знаменателей не дает вклада в скачок /6,7/, с помощью определения (9) из уравнения (18) находим интегральное уравнение на скачок параметрического решения Йоста:

$$\Delta\Big|_{x<-m} F(\lambda, r; x, y) = \frac{\varkappa_\lambda(x+y, -x, 0) F(\lambda, r; 0, y-x)}{x-y} +$$

$$+ \int_m^{-x-m} \frac{\varkappa_\lambda(x+y, \alpha, 0)}{(\alpha+x)(\alpha+y)} \Delta\Big|_{x+\alpha<-m} F(\lambda, r; x+\alpha, y+\alpha), \tag{38}$$

где значение верхнего предела интегрирования ясно из первой итерации. Итерируя это уравнение и учитывая связь (19) решения Йоста с параметрическим решением Йоста и свойства симметрии последнего, получаем:

$$\Delta\Big|_{x<-m} F(\lambda, r; x, y) = \frac{\Phi_\lambda(y, x)}{x-y} f(\lambda, y-x, r), \tag{39}$$

где функция $\Phi_\lambda(y, x)$ подчиняется уравнению

$$\Phi_\lambda(y,x)=\varkappa_\lambda(x+y,-x,0)+\int_m^{-x-m}\frac{d\alpha\,\varkappa_\lambda(x+y,\alpha,0)}{(\alpha+x)(\alpha+y)}\Phi_\lambda(y+\alpha,x+\alpha). \quad (40)$$

Для нахождения скачка на "кинематическом" разрезе из точки $x=-y$ заметим, что следующее выражение

$$f_0(\lambda,x+y,r)+\frac{f(\lambda,y-x,r)}{y-x}\int_m^\infty\frac{d\alpha\,\Phi_\lambda(y-x-\alpha,-\alpha)}{(\alpha+x)(\alpha-y)}W\{f_0(\lambda,x-y+2\alpha,r),f_0(\lambda,x+$$

$$+y,r)\}+\frac{f(\lambda,x-y,r)}{x-y}\int_m^\infty\frac{d\alpha\,\Phi_\lambda(x-y-\alpha,-\alpha)}{(\alpha-x)(\alpha+y)}W\{f_0(\lambda,y-x+2\alpha,r),f_0(\lambda,x+y,r)\} \quad (41)$$

тождественно удовлетворяет дифференциальному уравнению (20) и соответствующему граничному условию, в чем нетрудно убедиться с помощью уравнения Шредингера (I), уравнения (I7), представленного в виде (см. стр. II8 настоящего сборника)

$$f(\lambda,z,r)=f_0(\lambda,z,r)+\int_m^\infty\frac{d\alpha\,\Phi_\lambda(-z-\alpha,-\alpha)}{\alpha(\alpha+z)}f_0(\lambda,z+2\alpha,r)$$

и условия (2). Из (4I) очевидно, что соотношения обхода параметрического решения Йоста вокруг точки $x=-y$ по любому контуру, не пересекающему динамический разрез, совпадают с таковыми для свободного решения Йоста.

Если положить $x=-y+\tau;\ F(\lambda,r;\tau-y,y)\equiv F(\lambda,r;\tau)$, то

$$F(\lambda,r;e^{i\pi}\tau)=F(\lambda,r;e^{-i\pi}\tau)+2i\cos\pi\lambda\,F(\lambda,r;\tau). \quad (42)$$

Следовательно, точка $x=-y$ является для параметрического решения Йоста точкой ветвления порядка $1/2\pm\lambda$ и при физических λ превращается в полюс порядка $\ell=|\lambda|-1/2$. Это позволяет при целом ℓ перейти в (39) к пределу $y\to0$ и получить выражение для скачка решения Йоста

$$\Delta\Big|_{z<-m}f(\lambda,z,r)=\frac{\Phi_\lambda(0,z)}{z}f(\lambda,-z,r) \quad (43)$$

и тем самым доказать утверждение о справедливости (43) независимо от наличия связанных состояний на разрезе. Разумеется, к такому же выражению для скачка решения Йоста можно придти путем прямого вычисления скачка от ряда (I7) при целом ℓ.

Уравнение на решение Йоста

Пусть λ – произвольное вещественное число, а исходным является параметрическое решение Йоста. Рассмотрим аналитические свойства по переменной τ вспомогательной функции

$$B_\lambda(r,\xi;\tau)=\frac{1}{\tau}\left[F(\lambda,\xi;-\tau)f_0(\lambda,\tau,r)-F(\lambda,\xi;\tau)f_0(\lambda,-\tau,r)\right], \quad (44)$$

где

$$F(\lambda,\xi;-\tau)=F(\lambda,\xi;e^{-i\pi}\tau)\doteq F(\lambda,\xi;-\tau-y,y).$$

Из установленных выше аналитических свойств параметрического решения Йоста вытекает, что при произвольных вещественных λ и $r>0$, $\xi>0$ и фиксированном y, $Im\, y\neq 0$, $|arg\, y|\leq \pi-\varepsilon$ она является аналитической функцией в комплексной плоскости τ, за исключением существенной особенности при $\tau=\infty$ и, вообще говоря, трех точек ветвления: двух динамических $\tau=\pm(m-y)$ и одной кинематической $\tau=0$. Покажем, что $\tau=0$ является на самом деле устранимой особой точкой однозначного характера и B_λ регулярна в окрестности этой точки. Действительно, из соотношений обхода (42) убеждаемся, что

$$B_\lambda(r,\xi;e^{2i\pi}\tau)=B_\lambda(r,\xi;e^{i\pi}\tau)=B_\lambda(r,\xi;\tau). \tag{45}$$

Эти же соотношения обхода совместно со свойствами по λ (параметрическое решение Йоста – четная функция λ, как легко видеть из (18) или (21)), требуют, чтобы в круге $|\tau|<|m-y|$ параметрическое решение Йоста допускало представление

$$F(\lambda,r;\tau)=\tau^{1/2+\lambda}g(\lambda,\tau^2,r)+\tau^{1/2-\lambda}g(-\lambda,\tau^2,r), \tag{46}$$

где $g(\lambda,\tau^2,r)$ – регулярная функция τ^2 в этой окрестности $\tau=0$, и мы опустили ее зависимость от y. Подставляя (46) в (44), находим, что

$$B_\lambda(r,\xi;\tau)=2\sin\pi\lambda\left[g_0(\lambda,\tau^2,r)g(-\lambda,\tau^2,\xi)-g_0(-\lambda,\tau^2,r)g(\lambda,\tau^2,\xi)\right] \tag{47}$$

регулярная функция в этой окрестности точки $\tau=0$.

Таким образом, функция $B_\lambda(r,\xi;\tau)$ оказывается однозначной аналитической функцией τ в комплексной плоскости с разрезами $(y-\infty,\ y-m)$ и $(m-y,\infty-y)$. Скачки на этих разрезах определяются формулами (39) и (44):

$$\Delta\Big|_{\tau>m-y}B_\lambda(r,\xi;\tau)=\frac{\Phi_\lambda(y,-\tau-y)}{\tau+2y}f(\lambda,\tau+2y,\xi)\frac{f_0(\lambda,\tau,r)}{\tau}. \tag{48}$$

Скачок на левом разрезе получается заменой $\tau\to-\tau$ и изменением знака. Функции $B_\lambda(r;\tau)\equiv B_\lambda(r,r;\tau)$ и $B'_\lambda(r;\tau)\equiv\partial/\partial r B_\lambda(r,\xi;\tau)|_{\xi=r}$ имеют, очевидно, то же аналитические свойства, что и $B_\lambda(r,\xi;\tau)$. Кроме того, из неравенства (34) нетрудно получить, что

$$\lim_{|\tau|\to\infty}\left|e^{\tau r/2}F(\lambda,r;\tau-y,y)-1\right|=0 \tag{49}$$

равномерно в $|arg\,\tau|\leq\pi-\varepsilon$, $|arg(\tau-y)|\leq\pi-\varepsilon$. Тогда при $|\tau|\to\infty$ имеем:

$$B_\lambda(r;\tau)=O\left(\frac{1}{\tau^2}\right);\quad B'_\lambda(r;\tau)=-1+O\left(\frac{1}{\tau^2}\right)$$

равномерно вне разрезов. Применяя теперь к каждой из этих функций теорему Коши по контуру, огибающему разрезы и замкнутому двумя полуокружностями большого радиуса, получим, учитывая выражения для скачков (48) и устремляя радиусы полуокружностей к бесконечности:

$$B_\lambda(r;\tau)=2\int_m^\infty\frac{dt}{(t+y)}\Phi_\lambda(y,-t)\frac{f(\lambda,t+y,r)f_0(\lambda,t-y,r)}{[(t-y)^2-\tau^2]},$$

$$B'_\lambda(r;\tau)=-1+2\int_m^\infty\frac{dt}{(t+y)}\Phi_\lambda(y,-t)\frac{f(\lambda,t+y,r)\frac{d}{dr}f_0(\lambda,t-y,r)}{[(t-y)^2-\tau^2]}. \tag{50}$$

Из (44), учитывая (7), имеем с очевидностью, что при $\xi \neq r$

$$W_r\{B_\lambda(r,\xi;\tau), f_0(\lambda,\tau,r)\} = F(\lambda,\xi;\tau) = F(\lambda,\xi;\tau-y;y). \qquad (51)$$

Устремляя ξ к r с помощью (50) находим

$$F(\lambda,r;\tau-y,y) = f_0(\lambda,\tau,r) +$$

$$+2\int_{-1}^{\infty}\frac{dt}{(t+y)}\Phi_\lambda(y,-t)\frac{W\{f_0(\lambda,t-y,r), f_0(\lambda,\tau,r)\}}{[(t-y)^2-\tau^2]}f(\lambda,t+y,r). \qquad (52)$$

При $\ell = 0$ это уравнение впервые было получено в работах /5,7/. Искомое уравнение (5) получается предельным переходом при стремлении y к нулю, для осуществления которого необходимо существование при любых λ предела

$$\lim_{y\to 0}\Phi_\lambda(y,-t) = \Phi_\lambda(0,-t) = \Phi_\lambda(-t). \qquad (53)$$

Если этот предел существует, то, как указано в начале нашей работы, он пропорционален скачку приведенной парциальной амплитуды. Соотношение (53) будет доказано в следующей нашей работе (см.стр. II7 настоящего сборника).

Если решение уравнения (5) существует, то потенциал определяется по скачку единственным образом. Чтобы убедиться в этом, приведем обобщение (5) и (6) на случай двух потенциалов типа (3), которое можно вывести непосредственно из этих уравнений: пусть $m=\min\{m_1,m_2\}$, тогда

$$f_2(\lambda,z,r)-f_1(\lambda,z,r) = 2\int_m^{\infty}\frac{dt}{t}\left[\Phi_\lambda^{(2)}(-t)-\Phi_\lambda^{(1)}(-t)\right]\frac{W\{f_1(\lambda,t,r), f_1(\lambda,z,r)\}}{t^2-z^2}f_2(\lambda,t,r),$$

$$U_2(r)-U_1(r) = -\frac{d}{dr}\int_m^{\infty}\frac{dt}{t}\left[\Phi_\lambda^{(2)}(-t)-\Phi_\lambda^{(1)}(-t)\right]f_2(\lambda,t,r)f_1(\lambda,t,r). \qquad (54)$$

Отсюда для малых вариаций скачка имеем малые вариации потенциала

$$\delta U(r) = -\frac{d}{dr}\int_m^{\infty}\frac{dt}{t}\,\delta\Phi_\lambda(-t)f^2(\lambda,t,r). \qquad (55)$$

В заключение авторы выражают благодарность И.И.Орлову за постоянный интерес к работе и полезные обсуждения.

П р и л о ж е н и е А. Решение Йоста свободного уравнения Шредингера имеет вид /2,I2/:

$$f_0(\lambda,z,r) = e^{-i\pi/2(\lambda+1/2)}\left(\frac{\pi z r}{4i}\right)^{1/2}H_\lambda^{(2)}\left(\frac{zr}{2i}\right) = \left(\frac{zr}{\pi}\right)^{1/2}K_\lambda\left(\frac{zr}{2}\right) \qquad (56)$$

и допускает интегральное представление (формула 7.I43 из /I2/):

$$f_0(\lambda,z+2\alpha,r) = re^{-\frac{zr}{2}}\int_\alpha^{\infty}d\nu\, e^{-\nu r}P_{\lambda-1/2}\left(\frac{z+2\nu}{z+2\alpha}\right), \qquad (57)$$

где $\alpha>0$ и $|\arg(z+2\alpha)|\leq\pi-\varepsilon$. Пусть $\beta+\mu>\beta>0$. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{\beta+\mu}^{\infty} d\alpha f_0(\lambda,2\alpha,r)P_{\lambda-1/2}\left(\frac{\alpha^2+\beta^2-\mu^2}{2\alpha\beta}\right)=r\int\limits_{\beta+\mu}^{\infty} e^{-\nu r}d\nu\int\limits_{\beta+\mu}^{\nu} d\alpha P_{\lambda-1/2}\left(\frac{\alpha^2+\beta^2-\mu^2}{2\alpha\beta}\right)P_{\lambda-1/2}\left(\frac{\nu}{\alpha}\right), \quad (58)$$

где мы использовали (57) при $z = 0$. Для вычисления внутреннего интеграла воспользуемся формулой умножения для функций Лежандра /I3/, справедливой при произвольных значениях λ, если их аргументы больше единицы, что в нашем случае, очевидно, выполняется:

$$\nu > \alpha > \beta+\mu > \beta > 0,$$

$$\int\limits_{\beta+\mu}^{\nu} d\alpha P_{\lambda-1/2}\left(\frac{\nu}{\alpha}\right)P_{\lambda-1/2}\left(\frac{\alpha^2+\beta^2-\mu^2}{2\alpha\beta}\right)=\int\limits_{1}^{T_2} dT P_{\lambda-1/2}(T)\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Lambda^-(T)}^{\Lambda^+(T)}\frac{d\alpha\,\theta(-D)}{\sqrt{-D(X,Y,T)}},$$

где X и Y - аргументы функций Лежандра слева, $\Lambda^{\pm}(T)$ нули $D(X,Y,T)=X^2+Y^2+T^2-2XYT-1$ по α. Полагая $T=\gamma/\beta$, после вычисления второго интеграла получим:

$$\int\limits_{\beta+\mu}^{\nu} d\alpha P_{\lambda-1/2}\left(\frac{\nu}{\alpha}\right)P_{\lambda-1/2}\left(\frac{\alpha^2+\beta^2-\mu^2}{2\alpha\beta}\right)=\int\limits_{\beta}^{\nu-\mu} d\gamma P_{\lambda-1/2}\left(\frac{\gamma}{\beta}\right). \quad (59)$$

Подставляя (59) в (58), меняя порядок интегралов и вновь используя (57), находим:

$$\int\limits_{\beta+\mu}^{\infty} d\alpha f_0(\lambda,2\alpha,r)P_{\lambda-1/2}\left(\frac{\alpha^2+\beta^2-\mu^2}{2\alpha\beta}\right)=\frac{e^{-\mu r}}{r}f_0(\lambda,2\beta,r). \quad (60)$$

Заменяя $\alpha\to\alpha+\frac{z}{2}$, $\beta\to\beta+\frac{z}{2}$ получаем равенство:

$$\frac{e^{-\mu r}}{r}f_0(\lambda,z+2\beta,r)=\int\limits_{\beta+\mu}^{\infty} d\alpha f_0(\lambda,z+2\alpha,r)P_{\lambda-1/2}\left[\frac{(z+2\alpha)^2+(z+2\beta)^2-4\mu^2}{2(z+2\alpha)(z+2\beta)}\right]. \quad (61)$$

Это соотношение, доказанное сначала для вещественных z, легко аналитически продолжается в область $|arg(z+2\beta)|\le\pi-\varepsilon$ при любых комплексных значениях λ. В работах Альфаро, Редже, Россетти /2/ это равенство было доказано только для целых значений ℓ.

П р и л о ж е н и е В. Отметим прежде всего, что в области $|arg\,z|\le\pi-\varepsilon$, $\varepsilon>0$, при $\nu>0$:

$$|\nu+z|\ge\nu\sin\varepsilon. \quad (62)$$

Интегральное представление для функций Лежандра (формула 8.7II из /I2/) для любого комплексного C и вещественного λ, $|\lambda|-1/2=L>0$ дает неравенство

$$|P_{\lambda-1/2}(C)|\le(2|C|+1)^L. \quad (63)$$

Поскольку в рассматриваемой области z при $\alpha>0$, $|arg(z+2\alpha)|\le\pi-\varepsilon$, для

$$C=1+2\frac{(\alpha-\beta)^2-\mu^2}{(z+2\alpha)(z+2\beta)},$$

где $\alpha>\beta+\mu>\beta>0$, имеем:

$$2|C|+1\le 3+\frac{4(\alpha-\beta)^2}{|z+2\alpha||z+2\beta|}\le\left|\frac{z+2\alpha}{z+2\beta}\right|\left[4+\frac{3}{\sin\varepsilon}+ctg^2\varepsilon\right]=\left|\frac{z+2\alpha}{z+2\beta}\right|M(\varepsilon).$$

Тогда

$$|\mathscr{X}_\lambda(z,\alpha,\beta)|\le\int_m^{\alpha-\beta}|d\sigma(\mu)||P_{\lambda-1/2}(C)\le\left|\frac{z+2\alpha}{z+2\beta}\right|^L M_\lambda(\varepsilon)\rho(\alpha-\beta)\,. \tag{64}$$

Кроме того, в той же области z при $|\arg r|\le\frac{\pi}{2}-\delta$, $\delta>0$ справедливо неравенство /2/

$$\left|e^{\frac{zr}{2}}f_0(\lambda,z,r)\right|\le\left[\frac{2+|z||r|}{C'_\lambda|z||r|}\right]^L. \tag{65}$$

Легко убедиться далее, что

$$\frac{2+|\tau+2\nu||r|}{|\tau||r|}\le\frac{2+|\tau||r|}{|\tau||r|}(1+\nu|r|), \tag{66}$$

а при $b=r\cos\varphi$, где $|\varphi|\le\frac{\pi}{2}-\delta$, для $L>0$:

$$e^{-\nu b}(1+\nu|r|)^L\le e^{(\cos\varphi-L)}\left(\frac{L}{\cos\varphi}\right)^L\le e^{1-L}\left(\frac{L}{\sin\delta}\right)^L. \tag{67}$$

Тогда

$$\left|e^{\frac{x+y}{2}r}F_n(\lambda,r;x,y)\right|\le\prod_{k=1}^{n}\left\{\int_{\nu_{k-1}+m}^{\infty}\frac{d\nu_k|\mathscr{X}_\lambda(x+y,\nu_k,\nu_{k-1})|}{|\nu_k+x||\nu_k+y|}\right\}\left|e^{\frac{x+y}{2}r}f_0(\lambda,x+y+2\nu_n,r)\right|\le$$

$$\le\prod_{k=1}^{n}\left\{\int_{\nu_{k-1}}^{\infty}\frac{d\nu_k\rho(\nu_k-\nu_{k-1})}{|\nu_k+x||\nu_k+y|}\right\}e^{-\nu_n b}M_\lambda^n(\varepsilon)\left[\frac{2+|x+y+2\nu_n||r|}{C'_\lambda|x+y||r|}\right]^L\le$$

$$\le\prod_{k=1}^{n}\left\{\int_{\nu_{k-1}}^{\infty}\frac{d\nu_k\,\rho(\nu_k)}{|\nu_k+x||\nu_k+y|}\right\}e^{-\nu_n b}(1+\nu_n|r|)^L M_\lambda^n(\varepsilon)\left(\frac{2+|x+y||r|}{C'_\lambda|x+y||r|}\right)^L, \tag{68}$$

откуда и вытекает требуемая оценка (34), равномерная по ε и δ области (33).

Литература

1. Chadan K., Labatier P.C. Inverse Problems in Quantum Scattering Theory, 1977, N.Y.
2. Альфаро В.де, Редже Т. Потенциальное рассеяние. М.: Мир, 1966.
3. Нуиенцвейг Х.М. Причинность и дисперсионные соотношения. М.: Мир, 1976.
4. Орлов И.И., Парфенов Ю.В. - Теоретическая математическая физика. М., 1970, т.4, 18.
5. Орлов И.И., Парфенов Ю.В. Ученые записки ИГПИ, Иркутск, 1970, вып.40.
6. Орлов И.И., Парфенов Ю.В. Препринт ИГУ. Иркутск, 1969.
7. Парфенов Ю.В. Автореферат кандидатской диссертации. Иркутск, 1970.
8. Martin A. - Nuovo Cimento, 1961, v.19, 1257.

9. Cornille H. Preprint IPNO/TH 68,76 Orlay, 1966.
10. Calogero F., Cox J. - Nuovo Cimento, 1968, v.55, 786.
11. Чью Дж. Аналитическая теория S-матрицы. М.: Мир, 1968.
12. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений. М.: Наука, 1971.
13. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1965.

Иркутский государственный университет им.А.А.Жданова

Статья поступила в апреле 1981 г.

УДК 519.6

АЛГОРИТМ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ДАННЫХ В-СПЛАЙНАМИ

В.Н.Коноплин, И.И.Орлов

AN ALGORITHM OF DATA INTERPOLATION WITH THE HELP OF B-SPLINES,

V.N.Konoplin, I.I.Orlov

This paper describes algorithms of a rapid solution of systems with three and five-diagonal symmetric Toeplitz matrices and gives an algorithm of data interpolation with the help of B-splines at uniformaly located nodes.

При обработке различных экспериментов, в том числе и геофизических, возникает необходимость в записи получаемых дискретных данных в аналитической форме, пригодной для последующего использования. Среди существующих способов интерполяции в последнее время широкое распространение получила интерполяция сплайн-функциями.

Если проводить интерполяцию на неравномерной сетке, то придется выполнять много лишних операций при построении и использовании сплайна, поэтому существенный выигрыш в скорости обработки данных можно получить, "исправив" соответствующим образом сетку. От неравномерной сетки к равномерной при интерполяции экспериментальных данных всегда можно перейти, пересчитав каким-либо способом эти данные.

Существуют различные формы представления сплайнов /1/. Наиболее удобным для вычислений является представление интерполяционного сплайна в виде линейной комбинации локальных базисных сплайнов, которые также называют В-сплайнами.

В-сплайн степени $m-1$ на равномерной сетке с шагом 1 определяется следующей формулой:

$$B(x)=\sum_{\nu=0}^{m} C_m^{\nu}(-1)^{\nu}\left(x+\nu-\frac{m}{2}\right)_+^{m-1}, \quad (m>1), \tag{1}$$

где C_m^{ν} - число сочетаний из m по ν.

$$(x-k)_+^{m-1}=\begin{cases}(x-k)^{m-1}, & x>k\\ 0, & x\le k.\end{cases} \tag{2}$$