АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
СИБИРСКИЙ ИНСТИТУТ ЗЕМНОГО МАГНЕТИЗМА,
ИОНОСФЕРЫ И РАСПРОСТРАНЕНИЯ РАДИОВОЛН

ИССЛЕДОВАНИЯ
ПО ГЕОМАГНЕТИЗМУ, АЭРОНОМИИ И ФИЗИКЕ СОЛНЦА

Выпуск 69

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

ОТДЕЛЬНЫЕ ОТТИСКИ

МОСКВА
«НАУКА»
1984

Л и т е р а т у р а

1. Фаддеев Л.Д. - В кн.: Современные проблемы математики. Т.3. М.: ВИНИТИ, 1974, с.93-180.
2. Newton R.G. - J.Math.Phys., 1980, v.21, N 7, p.1698-1715.
3. Шадан К., Сабатье П. Обратные задачи в квантовой теории рассеяния. М.: Мир, 1980. 152 с.
4. Hoenders B. - In: Inverse Sourse Problems in Optics /Ed.Baltes H. N.Y.: Springer-Verlag, 1978, p.41-82.
5. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики.Т.2. М.: Мир, 1978. 395 с.
6. Фукс Б.А. Теория аналитических функций многих комплексных переменных. М.: Физматгиз, 1962. 419 с.
7. Фаддеев Л.Д. - Вестн. ЛГУ, 1956, № 7, с.126-130.
8. Wyatt P.J. - Appl.Opt.,1968, v.7, p.1879.
9. Schmidt-Weinmar H.G. -J.Opt.Soc.Am.,1975, v.65, p.1188-1189.
10. Lam D.K. et al. - Canad.J.Phys.,1976, v.54,N 19,p.1925-1934.
11. Devaney A.J. - J.Math.Phys., 1978, v.19, N 7, p.1526-1538.
12. Хургин Я.И., Яковлев В.П. Финитные функции в физике и технике. М.: Наука, 1971. 408 с.
13. Функции с двойной ортогональностью в радиоэлектронике и оптике /Под ред.М.К.Размахнина и В.П.Яковлева. М.: Сов.радио, 1971.234 с.

Московский государственный
университет им.М.В.Ломоносова

Статья поступила
в октябре 1983 г.

УДК 621.371

РАССЕЯНИЕ КОРОТКИХ РАДИОВОЛН НА РЕГУЛЯРНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЯХ В ВОЛНОВОДЕ ЗЕМЛЯ-ИОНОСФЕРА

Ю.В.Парфенов, В.М.Персиков

SHORT RADIO WAVE SCATTERING BY REGULAR INHOMOGENEITIES IN THE EARTH-IONOSPHERE WAVEGUIDE

Yu.V.Parfenov, V.M.Persikov

An analysis is made of an expression, derived in the Born's approximation, for a field, that scattered by a three-dimensional inhomogeneity in a stratified slab ionosphere. Using incoherent addition of normal waves an estimate is made of the spreading of a signal, consisting of a narrow group of waves, by a localized model inhomogeneity.

В настоящей работе будет рассмотрено рассеяние электромагнитного сигнала на плавной, локализованной, крупномасштабной неоднородности диэлектрической проницаемости в ионосфере с использованием в качестве математического аппарата метода нормальных волн /1/.

Постановка задачи и основные уравнения

Представим диэлектрическую проницаемость ионосферы в виде

$$\mathcal{E}(\vec{r}) = \mathcal{E}(z) + \Delta\mathcal{E}(\vec{r}),$$

где $\Delta\mathcal{E}(\vec{r})$ – дополнительная диэлектрическая проницаемость, связанная с неоднородностью, а $\mathcal{E}(z)$ может быть записана в виде [2]

$$\mathcal{E}(z) = 1 - \frac{4\pi e^2 N_e(z)}{m\omega^2} + 2\frac{z}{a_0},$$

где последнее слагаемое формально учитывает сферичность Земли; z – высота над поверхностью Земли; a_0 – радиус Земли.

В первом порядке теории возмущений (борновском приближении) выражение для рассеянного на неоднородности поля можно записать в виде [3]

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0(\vec{r}) + \int \sum_{i=1}^{3} \vec{G}^i(\vec{r}, \vec{r}') \left\{ \kappa_0^2 \Delta\mathcal{E}(\vec{r}') E_i^0(\vec{r}') \right\} d\vec{r}', \qquad (1)$$

где векторная функция Грина $\vec{G}^i(\vec{r}, \vec{r}')$ удовлетворяет уравнению

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{G}^i(\vec{r}, \vec{r}') - \kappa_0^2 \mathcal{E}(z) \vec{G}^i(\vec{r}, \vec{r}') = \vec{e}_i\, \delta(\vec{r} - \vec{r}'); \qquad (2)$$

$\kappa_0 = \omega/c$; $\vec{G}^i$ удовлетворяет также условиям излучения и соответствующим граничным условиям на поверхности Земли, совпадающим с граничными условиями для поля $\vec{E}(\vec{r})$; $\vec{E}^0(\vec{r})$ – поле, падающее на неоднородность

$$(\vec{E}^0(\vec{r}, t) = \vec{E}^0(\vec{r})\, e^{-i\omega t}).$$

Будем для определенности считать, что падающее поле является полем E типа ($E_z^0 \neq 0$; $H_z^0 = 0$), тогда на большом расстоянии от излучателя можно пренебречь кривизной фронта падающей волны и считать, что на неоднородность падает пакет плоских нормальных волн с отличными от нуля компонентами полей E_z^0 и H_y^0

$$E_z^0 \sim \sum_m A_m e^{i\gamma_m \cdot x} \left(\sqrt{\mathcal{E}(z)}\right)^{-1} \Psi_m^J(z) = \sum_m A_m e^{i\gamma_m R_0} e^{i\gamma_m \rho\cos\varphi} \left(\sqrt{\mathcal{E}(z)}\right)^{-1} \Psi_m^J(z), \qquad (3)$$

где (φ, ρ, z) – цилиндрические координаты, связанные с неоднородностью ($\rho = 0$; $z = z_0$ – положение центра неоднородности; $\varphi = 0$ – направление падающего поля; R_0 – расстояние между источником и центром неоднородности); γ_m и $\Psi_m^J(z)$ – собственные значения и собственные функции краевой задачи [1]. В случае простейших граничных условий на Земле и в ионосфере соответствующая краевая задача имеет вид

$$\frac{d^2\Psi_m^J(z)}{dz^2} + \left(\kappa_{эф}^2(z) - \gamma_m^2\right)\Psi_m^J(z) = 0; \quad \left.\frac{\partial \Psi_m^J}{\partial z}\right|_{z=0} = 0; \quad \left.\Psi_m^J(z)\right|_{z\to\infty} \to 0, \qquad (4)$$

где

$$\kappa_{эф}^2(z) \approx \kappa_0^2 \mathcal{E}(z).$$

В случае, если падающее поле имеет только E_z^0 -компоненту, следующее из (I) выражение для рассеянного поля может быть преобразовано к виду

$$E_z(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon(z)} \int \left\{ \nabla^2_{x,y} G(\vec{r}, \vec{r}') \right\} \Delta\varepsilon(\vec{r}') \cdot E_z^0(\vec{r}')\, d\vec{r}' \,, \tag{5}$$

где $G(\vec{r}, \vec{r}')$ - скалярная функция Грина, удовлетворяющая уравнению

$$\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') + K_0^2 \varepsilon(z) G(\vec{r}, \vec{r}') - \frac{1}{\varepsilon(z)} \frac{\partial \varepsilon(z)}{\partial z} \frac{\partial G}{\partial z} = \delta(\vec{r} - \vec{r}'),$$

которая может быть представлена в виде [4]

$$G_1(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{i}{4} \sum_n \sqrt{\varepsilon(z)}\, \Psi_n(z) \frac{\Psi_n(z')}{\sqrt{\varepsilon(z')}} H_0^{(1)}(\gamma_n \cdot R) \,,$$

где $R = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\varphi - \varphi')}$, а $H_0^{(1)}$ - функция Ханкеля, удовлетворяющая условию излучения.

Поскольку нас интересует рассеянное поле на большом расстоянии от излучателя, то мы можем взять асимптотическое выражение $H_0^{(1)}$ при ($R \to \infty$, $\rho \gg \rho'$) [5]

$$H_0^{(1)}(\gamma_n \cdot R) \approx (1-i) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\gamma_n \rho}}\, e^{i\gamma_n \rho - i\gamma_n \rho' \cos(\varphi - \varphi')}$$

Подставляя все в (I5), получим для рассеянного поля

$$E_z^{Борн.}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(z)}} \Delta_\perp \sum_n \Psi_n(z) \frac{e^{i\gamma_n \rho}}{\sqrt{\gamma_n \rho}} \cdot T_n \,,$$

где T_n - коэффициент возбуждения n нормальной волны при рассеянии

$$T_n = -i/4(1-i) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_m A_m e^{i\gamma_m R_0} \cdot K_{mn} \,.$$

Для неоднородностей типа $\Delta\varepsilon(\vec{r}) = \Delta\varepsilon(z) \cdot \Delta\varepsilon(\rho, \varphi)$ коэффициент K_{mn} можно представить в виде $K_{mn} = \mathcal{J}_{mn} \cdot T_{mn}$, где

$$\mathcal{J}_{mn} = \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\infty \rho' d\rho'\, e^{i\gamma_m \rho' \cos\varphi'} \Delta\varepsilon(\rho', \varphi') e^{-i\gamma_n \rho' \cos(\varphi - \varphi')} \,; \tag{6}$$

$$T_{mn} = \int_0^\infty \Psi_n(z') \Delta\varepsilon(z) \Psi_m(z')\, dz' . \tag{7}$$

Дальнейшее вычисление коэффициентов трансформации K_{mn} можно провести, задав конкретный вид неоднородности $\Delta\varepsilon(\vec{r})$. Выберем на данном этапе простейший вид неоднородности

$$\frac{\Delta\varepsilon(\vec{r})}{\varepsilon(z)} = \Delta\varepsilon(z) \Delta\varepsilon(\rho) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, b} e^{-\frac{(z - z_0)^2}{b^2}} \cdot \frac{1}{\pi a^2} e^{-\frac{\rho^2}{a^2}} \,,$$

где параметры b и a характеризуют эффективную высоту и ширину неоднородности. Интеграл $\mathcal{J}_{mn}$ вычисляется для рассматриваемой неоднородности явно и равен

$$\mathcal{J}_{mn} = e^{-\frac{a^2}{4} \cdot q_{mn}^2(\varphi)} \,, \tag{8}$$

где $q_{mn}(\varphi)=\sqrt{\gamma_m^2+\gamma_n^2-2\gamma_m\gamma_n\cos\varphi}$.

В рассматриваемом приближении $\mathcal{J}_{mn}$ полностью определяет угловую зависимость рассеяния с максимумом в направлении первоначального распространения волны ($\varphi=0$). При вычислении интеграла T_{mn} (7) собственные функции $\Psi_n(z)$ удобно взять в ВКБ приближении [1]

$$\Psi_n(z)=\left(\frac{2\gamma_n'^2}{\left|\frac{\partial I}{\partial\gamma_n'}\right|}\right)^{1/2}\frac{1}{\sqrt[4]{Q(z,\gamma_n')}}\cos\left[K_0\int_0^z\sqrt{Q(z,\gamma_n')}\,dz\right]= \tag{9}$$

$$=a_n\frac{1}{\sqrt[4]{Q_n}}\cos\Phi_n ,$$

где

$$\gamma_n'=\frac{\gamma_n}{K_0};\quad Q(z,\gamma_n')=\mathcal{E}(z)-\gamma_n'^2;\quad I(\gamma_n')=\int_{z_1}^{z_2}\sqrt{Q(z,\gamma_n')}\,dz.$$

Выражение для T_{mn} запишется в виде

$$T_{mn}=\frac{a_m a_n}{2}\int\frac{1}{\sqrt[4]{Q_n Q_m}}\left[\cos(\Phi_n-\Phi_m)+\cos(\Phi_n+\Phi_m)\right]\Delta\mathcal{E}(z)\,dz. \tag{10}$$

Поскольку в реальном волноводе Земля-ионосфера хорошо распространяются нормальные волны с номерами $n\gg1$, то вторым слагаемым в (10) можно пренебречь по сравнению с первым (так как $\cos(\Phi_n+\Phi_m)$ сильно осциллирует). В силу тех же причин при фиксированном n имеет смысл рассматривать только m , удовлетворяющие условию $|m-n|/n\ll1$.

В этом случае можно получить [6]

$$\Phi_n-\Phi_m\approx(n-m)\,\frac{1}{2}\left(\frac{d\gamma_1'^2}{dn}\right)K_0\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{Q_n(z)}} .$$

Таким образом,

$$T_{mn}\approx\frac{a_n^2}{2}\int_{z_1}^{z}\frac{1}{\sqrt{Q_n(z)}}\cos\left[(n-m)\frac{1}{2}\frac{d\gamma_1'^2}{dn}K_0\int_0^z\frac{dz'}{\sqrt{Q_n(z)}}\right]\Delta\mathcal{E}(z)\,dz, \tag{11}$$

где $z_{1,2}$ – точки поворота для n - нормальной волны. Примем, что центр неоднородности z_0 и высота b такие, что $|z_{1,2}-z_0|\gg b_0$, т.е. неоднородность расположена вдали от границ волновода. Тогда для T_{mn} можно получить следующее приближенное выражение:

$$T_{nm}\approx\frac{a_n^2}{2}\sqrt{Q_n(z_0)}\cos\left\{(n-m)\frac{1}{2}\frac{d\gamma'^2}{dn}K_0\int_0^z\frac{dz'}{\sqrt{Q_n(z)}}\right\}e^{-\left(\frac{b(n-m)K_0\,d\gamma_n'^2}{4\sqrt{Q_n(z_0)}\,dn}\right)^2}. \tag{12}$$

Оценка аргумента косинуса и экспоненты в (12) может быть произведена с помощью уравнения на спектр [1] и дает следующие результаты:

$$\frac{1}{2}\frac{d\gamma_n'^2}{dn}K_0\int_{z_1}^{z_0}\frac{dz}{\sqrt{Q_n(z)}}\sim\frac{\pi}{H_n}z_0;\qquad \frac{1}{2}\frac{d\gamma'^2}{dn}K_0\frac{1}{\sqrt{Q_n(z_0)}}\sim\frac{\pi}{H_n},$$

где H_n – "ширина" волновода для n-нормальной волны. Поскольку по условиям вывода формулы (I2) $z_0 \sim H_n$; $b \ll H_n$ и $\left|\frac{n-m}{n}\right| \ll 1$, то значение коэффициента трансформации в рассматриваемом приближении сильно зависит от номера m (при фиксированном n) и в целом носит характер немонотонной зависимости от $(n-m)$. Суммируя все вышеизложенное, запишем выражение для рассеянного поля в виде

$$E_z^{борн.}(\vec{r}) = \sum \frac{\Psi_n(z)}{\sqrt{\varepsilon(z)}} \Delta_\perp \left[\frac{e^{i\gamma_n \rho}}{\sqrt{\gamma_n \rho}} T_n(\varphi) \right], \qquad (I3)$$

где

$$T_n(\varphi) = \sum_m A_m e^{i\gamma_m R_0} e^{-\frac{a^2 q^2_{mn}(\varphi)}{4}} \cdot T_{mn} \quad . \qquad (I4)$$

Для оценки ряда (I3) с быстроосциллирующими членами можно применить так называемое "некогерентное приближение".

Некогерентное сложение нормальных волн

Известно [I], что статистический характер заполнения и границ волновода Земля-ионосфера, многомодовый характер распространения и большие расстояния между источником (приемником) и рассеивателем позволяют сделать предположение о некогерентном сложении нормальных волн. Указанная некогерентность означает, что при оценке плотности энергии рассеянного поля $W^{расс.}$ будут складываться не поля, а энергии отдельных нормальных волн

$$W^{расс.} \approx |E_z^{расс.}| \approx \sum_n |E_{zn}^{расс}|^2 .$$

Учитывая формулу (I3), имеем

$$W^{расс.} \approx \sum |E_{z_n}^{расс.}|^2 = \sum_n \left| \frac{\Psi_n(z)}{\sqrt{\varepsilon(z)}} \Delta_\perp \left[\frac{e^{i\gamma_n \rho}}{\sqrt{\gamma_n \rho}} T_n(\varphi) \right] \right|^2 . \qquad (I5)$$

Учитывая структуру формулы для T_n (I4), можно выработать процедуру приближенного суммирования в формуле (I5).

Поскольку при каждом фиксированном n γ_m мало отличается от γ_n, то $q^2_{mn}(\varphi) \approx 2\gamma_n^2(1-\cos\varphi)$, что позволяет переписать формулу для $W^{расс.}$ в виде

$$W^{расс.} \sim \sum_n \left| \frac{\Psi_n(z)}{\sqrt{\varepsilon(z)}} \Delta_\perp \left[\frac{e^{i\gamma_n \rho}}{\sqrt{\gamma_n \rho}} e^{-\frac{a^2}{2}\gamma_n^2(1-\cos\varphi)} \right] \right|^2 \left| \sum_m A_m e^{-i\gamma_m R_0} T_{mn} \right|^2 . \qquad (I6)$$

При вычислении квадрата модуля последней суммы в (I6) можно воспользоваться некогерентностью падающих нормальных волн, тогда

$$\left| \sum A_m e^{-i\gamma_n R_0} T_{mn} \right|^2 = \sum_m |A_m|^2 \cdot |T_{mn}|^2 = T_n^0 . \qquad (I7)$$

Для вычисления последней суммы в (I7) необходимо знать распределение падающего поля по нормальным волнам, т.е. коэффициенты A_m. В дальнейшем будем использовать модельное представление для A_m

$$A_m = W_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{\tau\sqrt{\pi}}} \exp\left\{-\frac{(m-m_0)^2}{2\tau^2}\right\}.$$

Поскольку $|A_m|^2$ есть энергия, переносимая m-нормальной волной в падающем поле E_z^0, то W_0 пропорционально полной энергии всего падающего на неоднородность поля. При вычислении T_m^0 сделаем замену $m-n=K$ и растянем пределы суммирования по K на $\pm\infty$, что можно сделать ввиду экспоненциальной малости слагаемых при больших K; переходя от суммирования по K к интегрированию, получим окончательно

$$T_n^0 = W_0 \cdot B_n \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{1+\frac{\tau^2}{\tau_1^2}}}\, e^{-\frac{(m_0-n)^2}{\tau_1^2+\tau^2}} \Big\{ 1 + e^{-\frac{\tau_1^2}{\tau_2^2}\cdot\frac{1}{1+\tau_1^2/\tau^2}} \cdot \cos\Big[2\,\frac{n-m_0}{\tau_2}\,\frac{1}{1+\frac{\tau^2}{\tau_1^2}}\Big]\Big\}, \tag{18}$$

где

$$B_n = \frac{1}{8\pi}\frac{a_n^2}{Q_n(z_0)}; \quad \frac{1}{\tau_1} = \frac{b\cdot K_0}{2}\left(\frac{d\gamma_n'^2}{dn}\frac{1}{\sqrt{Q_n(z_0)}}\right); \quad \frac{1}{\tau_2} = \frac{1}{2}\frac{d\gamma'^2}{dn} K_0 \int_{z_1}^{z_0} \frac{dz'}{\sqrt{Q_n(z')}}.$$

Поскольку нас интересует рассеянное поле на большом расстоянии от неоднородности $\rho \gg a$, то

$$\Delta_\perp \left(\frac{e^{-i\gamma_n\rho}}{\sqrt{\gamma_n\rho}}\, e^{-\frac{a^2}{2}\gamma_n^2(1-\cos\varphi)} \right) \approx -\gamma_n^2 \frac{e^{i\gamma_n\rho}}{\sqrt{\gamma_n\rho}}\, e^{-\frac{a^2}{2}\gamma_n^2(1-\cos\varphi)}$$

и выражение для энергии принимает в этом случае следующий вид:

$$W^{\text{расс}}(z) = \frac{1}{8\pi}\varepsilon(z)|\vec{E}|^2 = \frac{1}{8\pi}\sum_n \Psi_n^2(z)\gamma_n^3 \frac{1}{\rho} e^{-a^2\gamma_n^2(1-\cos\varphi)} \cdot T_n^0. \tag{19}$$

Плотность энергии как функция высоты z имеет квазиосциллирующий характер относительно среднего высотного хода, который практически и представляет интерес. Для получения среднего хода W достаточно провести усреднение в (19) по интервалу высот 1-10 км [1]. Проводя указанное усреднение и используя те же приближения, что и в [1], получим

$$\overline{W}^{\text{расс}} = \frac{1}{16\pi}\sum_n \frac{2\gamma_n'}{\left|\frac{\partial I}{\partial \gamma_n'}\right|^2}\cdot\frac{\gamma_n^3}{\sqrt{Q(z,\gamma_n')}}\cdot\frac{1}{\rho}\, e^{-a^2\gamma_n^2(1-\cos\varphi)}\cdot T_n^0. \tag{20}$$

В силу того, что $\gamma_n \approx 1$ и слабо меняется для узкого пакета нормальных волн, то коэффициент возбуждения будет в основном определяться T_n^0. Анализ формулы (18) для T_n^0 показывает, что при падении на неоднородность пакета нормальных волн с одним максимумом отраженный сигнал будет иметь центральный максимум с $n=m_0$ и ряд максимумов с уменьшающейся амплитудой. Однако характер проявления дополнительных максимумов будет слабый, так как при уменьшении периода осцилляций

$$T_{осц} \sim \tau_2 \left(1 + \frac{\tau^2}{\tau_1^2}\right) \pi$$

увеличивается модуль показателя экспоненты перед косинусом в (18), а при увеличении периода осцилляций увеличивается модуль показателя экспоненты, стоящей перед фигурной скобкой в (18). Таким образом, в рассматриваемом приближении не реализуется условие, когда дополнительные максимумы в T_n^o проявлялись достаточно четко и трансформация отраженного в другие нормальные волны будет несущественна.

Литература

1. Куркин В.И., Орлов И.И., Попов В.Н. Метод нормальных волн в проблеме коротковолновой радиосвязи. М.: Наука, 1981. 122 с.
2. Гуревич А.В., Цедилина Е.Е. Сверхдальнее распространение коротких радиоволн. М.: Наука, 1979. 246 с.
3. Ньютон Р. Теория рассеяния волн и частиц. М.: Мир, 1969. 607 с.
4. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
5. Справочник по специальным функциям/ Под ред.М.Абрамовича. М.: Наука, 1979. 830 с.
6. Мигдал А.Б. Качественные методы в квантовой теории. М.: Наука, 1975. 336 с.

Иркутский государственный университет им.А.А.Жданова

Статья поступила в марте 1984 г.

УДК 534.1

О ПОСТРОЕНИИ ПРИБЛИЖЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ НА ОСНОВЕ МЕТОДА НЬЮТОНА-КАНТОРОВИЧА

Н.В.Ильин, И.И.Орлов

ON CONSTRUCTING APPROXIMATE ANALYTIC SOLUTIONS TO WAVE EQUATIONS USING THE NEWTON-KANTOROVICH METHOD

N.V.Ilyin, I.I.Orlov

This paper examines a method for constructing approximate solution second-order equations with a variable coefficient and a small parameter before the highest derivative, based on the Newton-Kantorovich method for functional equations. Use of the Newton-Kantorovich method makes it possible to construct approximate solutions, having WKB-behavior far from turning points and with no singularities inherent in the WKB-method near the turning points.

Исследование многих физических задач сводится к решению дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами с малым параметром при старшей производной. Необходимость в изучении