АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
СИБИРСКИЙ ИНСТИТУТ ЗЕМНОГО МАГНЕТИЗМА,
ИОНОСФЕРЫ И РАСПРОСТРАНЕНИЯ РАДИОВОЛН

# ИССЛЕДОВАНИЯ

## ПО ГЕОМАГНЕТИЗМУ, АЭРОНОМИИ И ФИЗИКЕ СОЛНЦА

Выпуск 57

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

(Отдельный оттиск)

ИЗДАТЕЛЬСТВО „НАУКА"
Москва · 1981

УДК 530.I45

# УНИТАРНАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ В КЛАССЕ ЮКАВСКИХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Ю.В.Парфенов, С.Э.Коренблит

THE UNITARY PERTURBATION THEORY FOR YUKAWA POTENTIALS,
by Yu.V.Parfenov, S.E.Korenblit

The unitary dynamical system of equations is proposed to solve the direct scattering problem for Yukawa potentials, which is based on the integral representation for the Jost function. The weight function of this representation is independent of the angular momentum; it is determined by the linear integral equation with the potential, and closely connected with the amplitude discontinuity of momentum transfer.

В предыдущей работе (см.стр. 83 настоящего сборника) были доказаны уравнения, решающие задачу восстановления потенциала по скачку $S$ матрицы при произвольном значении углового момента. Эти уравнения справедливы при условии, что скачок приведенной парциальной амплитуды является граничным значением аналитической по одной переменной функции двух переменных, определяющей скачок параметрического решения Йоста.

В настоящей работе доказано выполнение этого условия. С этой целью для упомянутой выше функции находится интегральное представление типа Меллера-Фока, позволяющее просто исследовать ее аналитические свойства. Ядро этого представления, с одной стороны, однозначно определяется потенциалом, с другой стороны, тесно связано с полной амплитудой рассеяния и позволяет получать для нее приближенное выражение, точно удовлетворяющее условию унитарности.

## Вывод основных уравнений

Как показано авторами на стр. 85 настоящего сборника, решение радиального уравнения Шредингера, нормированное в бесконечности – решение Йоста, может быть представлено рядом (обозначения те же, что и на стр. 84 настоящего сборника):

$$f(\lambda,z,r)=f_0(\lambda,z,r)+\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{n}\left\{\int_{\nu_{k-1}+m}^{\infty}\frac{d\nu_k\,\varkappa_\lambda(z,\nu_k,\nu_{k-1})}{\nu_k(\nu_k+z)}\right\}f_0(\lambda,z+2\nu_n,r), \qquad (1)$$

сходящимся равномерно по $z, r$ и $\lambda$ в области

$$D_\varepsilon^\delta=\left\{r,z,\lambda:|\arg z|\le\pi-\varepsilon;\ |\arg r|\le\frac{\pi}{2}-\delta;\ |\lambda^2|<\infty\right\}, \qquad (2)$$

где

$$\varkappa_\lambda(z,\alpha,\beta)=\theta(\alpha-\beta-m)\int_m^{\alpha-\beta}d\sigma(\mu)P_{\lambda-\frac{1}{2}}\left[\frac{(z+2\alpha)^2+(z+2\beta)^2-4\mu^2}{2(z+2\alpha)(z+2\beta)}\right]. \qquad (3)$$

Потенциал уравнения Шредингера определяется равенством

$$U(r)=\int_m^{\infty}\frac{e^{-\mu r}}{r}\,d\sigma(\mu)$$

и подчинен тем же ограничениям, что и в предыдущей работе. Покажем, как функция, определяющая параметрическое решение Йоста, определяет обычное решение Йоста, а следовательно, и $S$ - матрицу. Переставляя в каждом слагаемом в (I) последний интеграл на первое место, получим:

$$f(\lambda, z, r) = f_0(\lambda, z, r) + \int_m^\infty \frac{d\alpha}{\alpha} \frac{\Phi_\lambda(-z-\alpha, -\alpha)}{(\alpha+z)} f_0(\lambda, z+2\alpha, r), \qquad (4)$$

где через $\Phi_\lambda$ обозначен ряд

$$\Phi_\lambda(-z-\alpha, -\alpha) = \varkappa_\lambda(z, \alpha, 0) + \sum_{n=1}^\infty \theta[\alpha - m(n+1)] \times$$

$$\times \prod_{k=1}^n \left\{ \int_{\nu_{k-1}+m}^{\alpha - m(n+1-k)} \frac{d\nu_k \varkappa_\lambda(z, \nu_k, \nu_{k-1})}{\nu_k(\nu_k + z)} \right\} \varkappa_\lambda(z, \alpha, \nu_n). \qquad (5)$$

Подставляя (4) в уравнение Шредингера, получим выражение для потенциала

$$U(r) f(\lambda, z, r) = \int_m^\infty d\alpha\, \Phi_\lambda(-z-\alpha, -\alpha) \dot{f}_0(\lambda, z+2\alpha, r). \qquad (6)$$

Непосредственно из определения (5) следует уравнение на функцию $\Phi_\lambda$:

$$\Phi_\lambda(-z-\alpha, -\alpha) = \varkappa_\lambda(z, \alpha, 0) + \theta(\alpha - 2m) \int_m^{\alpha - m} \frac{d\beta \varkappa_\lambda(z, \alpha, \beta)}{\beta(\beta+z)} \Phi_\lambda(-z-\beta, -\beta). \qquad (7)$$

Полагая в этом уравнении $y = -z-\alpha$, $x = -\alpha$ и учитывая (3), его можно привести к виду, совпадающему с полученным нами ранее (см.стр. 89 настоящего сборника, формула (40)) уравнением для скачка параметрического решения Йоста. Отсюда заключаем, что функция, определяющая разложение решения Йоста по решениям свободного уравнения Шредингера (4), с точностью до замены переменных совпадает со скачком параметрического решения Йоста.

Покажем теперь, что зависимость от $\lambda$ у функции $\Phi_\lambda$ может быть отделена явно, аналогично представлению (3). Переписав уравнение (7) в переменных $q = z/2$, $u = \alpha + z/2$, ищем его решение в виде

$$\Phi_\lambda(-q-u, q-u) = \theta(u-q-m) \int_m^{u-q} d\nu\, P_{\lambda - 1/2}\left(\frac{u^2+q^2-\nu^2}{2uq}\right) D(\nu; q^2; u^2). \qquad (8)$$

С помощью формулы умножения для функций Лежандра в форме (23) получаем уравнение на функцию $D$ при условии, что $Im(q-u) = 0$ и $|q| < |u|$:

$$\theta(u-q-\nu) D(\nu; q^2; u^2) = \theta(u-q-\nu) \int_m^\nu d\sigma(\mu) \delta(\nu - \mu) + \theta(u-q-\nu) \theta(\nu - 2m) \times$$

$$\times \int_m^{\nu - m} d\mu \int_m^{\nu - \mu} d\sigma(\gamma) \frac{1}{\pi} \int_{\Lambda^-(\nu)}^{\Lambda^+(\nu)} \frac{d\Lambda\, D(\mu; q^2; \Lambda)}{(\Lambda - q^2)\sqrt{(\Lambda^+(\nu) - \Lambda)(\Lambda - \Lambda^-(\nu))}}, \qquad (9)$$

где $\Lambda^{\pm}(\nu) \equiv \Lambda^{\pm}(\nu, \mu, \gamma; q^2, u^2)$ – известные функции, определенные в (24). Единственность решения уравнений (7) и (9) очевидна, поскольку при любом конечном $\alpha$ (соответственно $\nu$ ) итерационные ряды для них содержат лишь конечное число членов. С другой стороны, из оценок, приведенных нами для $n$ -й итерации (7), легко получить оценку, справедливую при любом вещественном $\lambda$ в области $|\arg z| \le \pi - \varepsilon$ :

$$\left|\Phi_\lambda^{(n)}(-z-\alpha,-\alpha)\right| \le \rho(\alpha)\frac{M_\lambda^{n+1}(\varepsilon)}{n!}\left|\frac{z+2\alpha}{z}\right|^L\left[\int_0^\alpha \frac{d\nu\,\rho(\nu)}{\nu|\nu+z|}\right]^n \tag{10}$$

Здесь $L = |\lambda| - \frac{1}{2} > 0$, $\rho(\alpha)$ – непрерывная неубывающая мажоранта для потенциала и $M_\lambda(\varepsilon)$ – известная функция, определенная авторами на стр. 93 настоящего сборника. Поскольку из (8)

$$\Phi_\lambda^{(n)}(-z-\alpha,-\alpha) = \theta(\alpha-m)\int_m^\alpha d\nu\, P_{\lambda-1/2}\left(1+2\frac{\alpha^2-\nu^2}{z(z+2\alpha)}\right) D^{(n)}\left(\nu;\left(\frac{z}{2}\right)^2;\left(\alpha+\frac{z}{2}\right)^2\right), \tag{11}$$

а при целых $\ell$ функция Лежандра не имеет нулей вне отрезка [-1, 1], аналогичная оценка существует и для

$$\left|\int_m^\alpha D^{(n)}\,d\nu\right| .$$

Из этих оценок вытекает, что уравнение (7) определяет при произвольном вещественном $\lambda$ и фиксированном $\alpha > m$ функцию, аналитическую в области $|\arg z| \le \pi - \varepsilon$. Аналогично уравнение (9) при фиксированных $m < \nu < \alpha$ определяет функцию

$$\theta(\alpha-\nu)\,\theta(\nu-m)\,D\left(\nu;\left(\frac{y-\alpha}{2}\right)^2;\left(\frac{y+\alpha}{2}\right)^2\right),$$

аналитическую в комплексной плоскости $y$ , за исключением конечной области, содержащей отрезок $\left[\frac{m\nu}{\alpha}, \frac{\nu(\nu-m)}{\alpha}\right]$, но не содержащей точки $y = 0$. Все это позволяет утверждать (см.Приложение), что функция

$$\Phi_\lambda(-y,-\alpha) = \int_m^\alpha d\nu\, P_{\lambda-1/2}\left(1+2\frac{\alpha^2-\nu^2}{y^2-\alpha^2}\right) D\left(\nu;\left(\frac{y-\alpha}{2}\right)^2;\left(\frac{y+\alpha}{2}\right)^2\right)\theta(\alpha-m) \tag{12}$$

при любом фиксированном $\alpha > m$ является аналитической функцией двух комплексных переменных: целой функцией $\lambda^2$ при фиксированном $y$ и однозначной аналитической функцией $y$ в комплексной плоскости с разрезами $[-\alpha, -m]$, $[m, \alpha]$ при произвольном фиксированном $\lambda$ . При полуцелом $\lambda$ в соответствии с изложенным (см.стр. 89 настоящего сборника) функция $\Phi_\lambda(-y, -\alpha)$ имеет лишь динамический разрез $[m, \alpha - m]$ и два полюса порядка $\ell = |\lambda| - \frac{1}{2}$ в точках $y = \pm\alpha$ . Следовательно, предел

$$\lim_{y \to 0} \Phi_\lambda(-y,-\alpha) = \Phi_\lambda(0,-\alpha) = \Phi_\lambda(-\alpha) \tag{13}$$

существует при произвольном комплексном $\lambda$ и дается выражением

$$\Phi_\lambda(0,-\alpha) = \int_m^\alpha d\nu\, P_{\lambda-1/2}\left(2\frac{\nu^2}{\alpha^2}-1\right) D\left(\nu;\frac{\alpha^2}{4};\frac{\alpha^2}{4}\right)\theta(\alpha-m). \tag{14}$$

В предыдущей работе авторов было показано, что выражение (14) пропорционально скачку приведенной парциальной амплитуды на левом разрезе. Последний, как известно, определяется скачком полной амплитуды рассеяния по передаче импульса /2/, продолженным в область отрицательных энергий:

$$h(s,t)=\frac{1}{2i}\left[T(s,t+i0)-T(s,t-i0)\right],\ (t>m^2), \tag{15}$$

где передача импульса связана с углом рассеяния $\theta$ в с.ц.м.:

$$t=-2s(1-\cos\theta),\ \text{а}\ s=k^2=e^{-i\pi}(z^2/4),$$

полная энергия в этой системе. Так как равенство (I4) установлено при любом комплексном $\lambda$, то справедливо соотношение:

$$\theta(t-m^2)\theta(-4s-t)h(s,t)=\theta(t-m^2)\theta(-4s-t)\frac{\pi}{2}\frac{D(\sqrt{t};-s;-s)}{(-\sqrt{t})}, \tag{16}$$

где

$$s<-\frac{m^2}{4}.$$

Унитарность и теория возмущений

Покажем, что найденные в предыдущем пункте уравнения позволяют получить приближенное выражение для полной амплитуды, точно удовлетворяющее условию унитарности.

Действительно, как известно /3/, определяемая решением Йоста функция Йоста осуществляет унитарную факторизацию $S$-матрицы:

$$S(\lambda,z)=e^{i\pi(\lambda-1/2)}\lim_{r\to 0}\frac{f(\lambda,z,r)}{f(\lambda,-z,r)}=\frac{E_\lambda(z)}{E_\lambda(-z)}. \tag{17}$$

Подставляя соотношение (4) в определение функции Йоста и используя (8), получаем представление

$$E_\lambda(z)-1=\int_m^\infty\frac{d\alpha}{\alpha}\,\frac{\Phi_\lambda(-z-\alpha,-\alpha)}{(\alpha+z)}\left(\frac{z}{z+2\alpha}\right)^{\lambda-1/2}=$$

$$=\int_m^\infty d\nu\int_\nu^\infty\frac{d\alpha}{\alpha}\,\frac{D\left(\nu;\left(\frac{z}{2}\right)^2;\left(\alpha+\frac{z}{2}\right)^2\right)}{(\alpha+z)}P_{\lambda-1/2}\left(1+2\frac{\alpha^2-\nu^2}{z(z+2\alpha)}\right)\left(\frac{z}{z+2\alpha}\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}, \tag{18}$$

справедливое в области $|\arg z|\leq\pi-\varepsilon;\ \mathrm{Re}\,\lambda\geq 0$.

Полная амплитуда рассеяния определяется выражением

$$T(s,t)=\frac{1}{z}\sum_{\ell=0}^\infty(2\ell+1)\left[S\left(\ell+\frac{1}{2},z\right)-1\right]P_\ell\left(1+\frac{t}{2s}\right) \tag{19}$$

и будет точно удовлетворять условию унитарности независимо от числа итераций в уравнении (9). Таким образом, путем введения функции трех переменных $D$, факторизующей зависимость от углового момента в скачке параметрического решения Йоста (I2), удается построить линейную и унитарную динамическую схему решения прямой задачи рассеяния.

Динамическая унитарная схема, основанная на построении функций Йоста, была предложена в работе Альфаро, Редже, Розетти /4/. Однако в их подходе весовая функция в представлении для функции Йоста зависит от двух аргументов и определяется существенно нелинейным уравнением. Какая-либо связь этой весовой функции с полной амплитудой, помимо самих динамических уравнений, также неизвестна. В настоящем подходе эта связь существует и дается соотношениями (15) и (16). Отметим, что в обоих подходах функция Йоста определяется для всех допустимых значений $\lambda$, что позволяет в принципе найти траектории полюсов Редже и получить для полной амплитуды представление Зоммерфельда-Ватсона.

В заключение авторы благодарят И.И.Орлова за постоянный интерес к работе и стимулирующие дискуссии.

## Приложение

Получим некоторые следствия формулы умножения для функций Лежандра, которая вытекает из теоремы сложения для этих функций /5,6/

$$P_{\lambda-1/2}(X)P_{\lambda-1/2}(Y)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\varphi\, P_{\lambda-1/2}\left(XY-\cos\varphi\sqrt{(X^2-1)(Y^2-1)}\right) \tag{20}$$

и справедлива для любого комплексного $\lambda$ при условии, что либо, 1)

$|arg(X-1)|<\pi; |arg(Y-1)|<\pi;$ либо, 2) $X, Y\in(-1,1)$.

Пусть $X(\alpha)$ и $Y(\alpha)$ - непрерывные однозначные функции, удовлетворяющие этим условиям при $\alpha\in[\alpha_1,\alpha_2]$, причем $X(\alpha_2)=Y(\alpha_1)=1$. Тогда для любой непрерывной на этом сегменте функции $F(\alpha)$

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha P_{\lambda-1/2}(X(\alpha))P_{\lambda-1/2}(Y(\alpha))F(\alpha)=\int_1^{T_2} dT P_{\lambda-1/2}(T)\frac{1}{\pi}\int_{\Lambda^-(T)}^{\Lambda^+(T)}\frac{d\alpha F(\alpha)\theta(-D)}{\sqrt{-D(X,Y,T)}}, \tag{21}$$

где мы использовали (20), поменяли порядок интегрирования и обозначили

$$D(X(\alpha), Y(\alpha), T)=X^2+Y^2+T^2-2XYT-1=$$

$$=(T-T_0(\alpha))(T-T_\pi(\alpha))=A(T)(\alpha-\Lambda^+(T))(\alpha-\Lambda^-(T)), \tag{22}$$

( $A(T)$ - известная функция). Здесь $T_{0,\pi}(\alpha)=XY\pm\sqrt{(X^2-1)(Y^2-1)}$, откуда очевидно, что $\alpha_1$, $\alpha_2$ - корни уравнения $T_0(\alpha)=T_\pi(\alpha)$. Точно также $\Lambda^\pm(T)$ - нули функции $D$ по $\alpha$, между которыми она отрицательна, а $T_1=1$ и $T_2$ - корни уравнения $\Lambda^+(T)=\Lambda^-(T)$, причем при условии 1) имеем $|arg(T_2-1)|<\pi$, а при условии 2) $-1<T_2\leq 1$. В нашем случае формулы (21) и (22) принимают вид:

$$\int_{q+\mu}^{u-\gamma} d\alpha P_{\lambda-1/2}\left[\frac{u^2+\alpha^2-\gamma^2}{2u\alpha}\right]P_{\lambda-1/2}\left[\frac{q^2+\alpha^2-\mu^2}{2\alpha q}\right]F(\alpha^2)=$$

$$=\int_{\gamma+\mu}^{u-q} d\nu P_{\lambda-1/2}\left[\frac{u^2+q^2-\nu^2}{2uq}\right]\frac{1}{\pi}\int_{\Lambda^-(\nu)}^{\Lambda^+(\nu)}\frac{d\Lambda F(\Lambda)}{\sqrt{(\Lambda^+(\nu)-\Lambda)(\Lambda-\Lambda^-(\nu))}}, \tag{23}$$

где

$$\Lambda^\pm(\nu)\equiv\Lambda^\pm(\nu,\mu,\gamma;q^2,u^2)=\frac{1}{\nu^2}\left[B(\nu)\pm\sqrt{\square(\nu)}\right];$$

$$4\square(\nu)=((u+q)^2-\nu^2)((u-q)^2-\nu^2)(\nu^2-(\gamma+\mu)^2)(\nu^2-(\gamma-\mu)^2);$$

$$2B(\nu)=\nu^2(u^2+q^2+\gamma^2+\mu^2-\nu^2)-(u^2-q^2)(\gamma^2-\mu^2); \qquad (24)$$

условия I) выполнены, если

$$\operatorname{Im}(u-q)=0;\ |\arg(uq)|<\pi;\ \gamma+\mu<u-q;\ \gamma>0,\ \mu>0.$$

Это значит, что $|q|<|u|$ . В переменных $y=u+q,\ \beta=u-q$ эти условия имеют вид:

$$\beta>\gamma+\mu;\ |\arg(y^2-\beta^2)|<\pi;\ |y+\beta|>|y-\beta|.$$

Тогда обе части равенства (23) будут аналитическими функциями $y$ в области

$$|\arg y|<\pi/2;\ y\bar{\in}[0,\beta].$$

Заметим, что в правой части этого равенства

$$\int\limits_{\gamma+\mu}^{\beta} d\nu P_{\lambda-1/2}\left(1+2\frac{\beta^2-\nu^2}{y^2-\beta^2}\right)\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Lambda^-(\nu)}^{\Lambda^+(\nu)}\frac{d\Lambda\, F(\Lambda)}{(\Lambda^+-\Lambda)(\Lambda^--\Lambda)},$$

для функции Лежандра существует предел при $y\to 0,\ P_{\lambda-1/2}\left(\frac{2\nu^2}{\beta^2}-1\right)$, поскольку $\nu>\gamma+\mu>0$ /5/.

Литература


1. V.de Alfaro, Rosetti C. - Nuovo Cimento, 1960, v.18, 783.
2. Чью Дж. Аналитическая теория $S$ – матрицы. М.: Мир, 1968.
3. В.де Альфаро, Редже Т. Потенциальное рассеяние. М.: Мир, 1966.
4. V.de Alfaro, Regge T., Rosetti C. - Nuovo Cimento, 1962, v.26, 1029.
5. Кратцер А., Франц В. Трансцендентные функции. М.: Изд-во иностр.лит., 1963.
6. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1965.



Иркутский государственный университет им.А.А.Жданова



Статья поступила в апреле 1981 г.



УДК 530.145


## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЫЧИТАТЕЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ В ДВОЙНЫХ ДИСПЕРСИОННЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ


В.И.Кириллов, И.И.Орлов, Ю.В.Парфенов


## DEFINITION OF SUBTRACTIVE POLYNOMIALS IN DOUBLE DISPERSION REPRESENTATIONS OF QUANTUM MECHANICS,


by V.I.Kirillov, I.I.Orlov, Yu.V.Parfenov



The method is proposed to obtain double dispersion representations in quantum mechanics. It is shown that subtraction terms are determined

by double spectral functions. The pole and resonance terms are involved in subtraction polynomial coefficients which are also determined by the double spectral functions.

В классе юкавских потенциалов нерелятивистская амплитуда рассеяния полиномиально ограничена по передаче импульса и удовлетворяет двойному дисперсионному представлению /I/

$$f(s,t)=f_B(t)+\sum_{k=1}^{p}\frac{\Gamma_k(t)}{s-s_k}+\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{n}\frac{t^m}{m!}\int_0^\infty\frac{g_m(s')}{s'-s}ds'+$$

$$+\frac{t^{n+1}}{\pi^2}\int_0^\infty ds'\int_{4m^2}^\infty dt'\frac{\rho(s',t')}{t'^{\,n+1}(s'-s)(t'-t)}, \qquad (I)$$

где $f_B(t)$ - борновская амплитуда. С помощью итерационного метода Мандельстама было показано /I/, что двойная спектральная функция $\rho(s,t)$ полностью определяется борновской амплитудой. Положения связанных состояний $s_k$ вычеты $\Gamma_k(t)$ и функции $g_k(s)$, в принципе, определяются с помощью аналитического продолжения в комплексной плоскости углового момента формулы Грибова-Фруассара (см.,например, /2/). Тем самым борновская амплитуда позволяет определить амплитуду рассеяния, не прибегая непосредственно к уравнению Шредингера.

В данной работе с помощью аналитического продолжения по энергетической переменной $s$ получено представление (I) методом, допускающим естественное обобщение на релятивистский случай. На этом пути характеристики $s_k$, $\Gamma_k(t), g_k(s)$ оказываются естественно связанными с мнимой частью амплитуды $f(s,t)$ по $t$.

Поскольку двойная спектральная функция при некоторых ограничениях на юкавские потенциалы /3/ недостаточно быстро падает по $x$, то существует интеграл

$$I(s,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{\rho(x,t)}{x-s}dx, \qquad (2)$$

который совпадает с $Im_t(f(s,t)-f_B(t))$. Функция $I(s,t)$ достаточно быстро стремится к нулю при $t\to\infty$ в некоторой области $s$ /4/. Это свойство позволяет представить амплитуду рассеяния в этой области $s$ в невычтенной форме

$$f(s,t)=f_B(t)+\frac{1}{\pi}\int_{4m^2}^\infty dt'\frac{I(s,t')}{t'-t}. \qquad (3)$$

Распространив интеграл в формуле (3),с помощью аналитического продолжения на всю разрезанную плоскость $s$ получим амплитуду, определенную для всех значений переменных.

В той области изменения $s$, где формула (3) справедлива в обычном смысле, запишем амплитуду формально в вычтенном виде

$$f(s,t)=f_B(t)+\frac{t^{n+1}}{\pi}\int_{4m^2}^\infty dt'\frac{I(s,t')}{t'^{\,n+1}(t'-t)}+\sum_{k=0}^{n}b_k(s)t^k, \qquad (4)$$

где

$$b_k(s) = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{I(s,x)}{x^{n+1}} dx . \qquad (5)$$

Если $n$ таково, что интеграл в соотношении (4) существует при всех $s$, то процедуру аналитического продолжения следует применять лишь к функциям $b_k(s)$. Это аналитическое продолжение формулы (4) также определяет амплитуду во всей области изменения переменных.

Поскольку $f(s,t) - f_B(t)$ стремится к нулю при $s \to \infty$ /2/, то из формулы (4) следует, что функции $b_k(s)$ также обращаются в нуль на бесконечности. Так как аналитические свойства $b_k(s)$ совпадают с аналитическими свойствами амплитуды рассеяния $f(s,t)$, то $b_k(s)$ лишь имеют полюса первого порядка на вещественной оси и разрез $(0, \infty)$. Эти свойства и конечность числа связанных состояний для рассматриваемых потенциалов /4/ приводят для $b_k(s)$ к представлению

$$b_k(s) = \sum_{\nu=1}^{p} \frac{\Gamma_{k\nu}}{s - s_\nu} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} ds' \frac{g_k(s')}{s' - s} . \qquad (6)$$

Подставляя полученное выражение для $b_k(s)$ в формулу (4), получаем представление (I). Тем самым показано, что двойные спектральные представления (I) могут быть получены из формулы (3) с помощью операции аналитического продолжения интеграла по $s$. Кроме того, установлено, что все входящие в представление (I) характеристики $s_k$, $\Gamma_k$, $g_k(s)$ выражаются через $Im_t(f(s,t) - f_B(t))$.

Рассмотрим поведение $b_k(s)$ в случае, когда $I(s,t)$ при больших $t$ может быть представлена в виде

$$I(s,t) = \sum_{\nu=0}^{n} \beta_\nu(s) \left(\frac{t}{4m^2}\right)^{\alpha(s)-\nu} + \tilde{I}(s,t) , \qquad (7)$$

$\tilde{I}(s,t)$ – достаточно быстро падает при $t \to \infty$. Тогда аналитическим продолжением $b_k(s)$ будет функция

$$b_k(s) = \tilde{b}_k(s) + \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\beta_\nu(s)}{(4m^2)^k} \frac{1}{k + \nu - \alpha(s)} , \qquad (8)$$

$\tilde{b}_k(s)$ определяются выражением (5) с $I = \tilde{I}$ и являются аналитическими функциями для всех $k$. Отсюда и из (4) следует, что полюсные и резонансные члены содержатся в вычитательных членах. Рассмотрим полюсные члены. Такое поведение $b_k(s)$ приводит к появлению полюсных членов в парциальных амплитудах следующего вида:

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n} \frac{R_{ek}(s)}{(4m^2)^k} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\beta_\nu(s)}{k + \nu - \alpha(s)} , \qquad (9)$$

здесь

$$R_{ek}(s) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} P_e(c)\, t^k dc .$$

Если при некотором $s_r$ $\alpha(s_r)$ достигает целого значения $\alpha(s_r) = r > 0$, то в полной амплитуде появляется полюс с вычетом

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{r} \left(-\frac{s_r}{2m^2}\right)^k (1-c)^k \beta_{r-k}(s_r) , \qquad (10)$$

т.е. связанное состояние с этой энергией возникает для всех $\ell < r$. Условия отсутствия связанных состояний с $\ell < r$ имеют вид

$$\beta_\kappa(s_r) = \left(-\frac{s_r}{2m^2}\right)^\kappa \beta_0(s_r)\, d_{\kappa r}, \tag{II}$$

$\kappa = 0, 1, \ldots, r$ при этом $d_{\kappa r}$ таковы, что

$$\sum_{\kappa=0}^{r} d_{\kappa r}(1-c)^{r-\kappa} = P_r(c).$$

По существу эти условия приводят к полюсам в полной амплитуде следующего вида

$$f(s,t)_{s\to s_r} \sim \frac{1}{\pi}\left(-\frac{s_r}{2m^2}\right)^r \frac{\beta_0(s_r) P_r(c)}{r-\alpha(s)}. \tag{I2}$$

В заключение рассмотрим поведение $\rho$ – функции на низшей границе /2/, которое связано с поведением длин рассеяния $a_\ell$ в области больших $\ell$. Поскольку в этом случае

$$Im\, A_\ell(s) = \frac{1}{2\pi s}\int_{\tau(s)}^{\infty} dt'\, \rho(s,t')\, Q_\ell\left(1+\frac{t'}{2s}\right), \tag{I3}$$

где $\tau(s) = m^2(4+m^2/s)$, то для длины рассеяния получаем

$$a_\ell^2 = \left(Im\, A_\ell(s)\, s^{-(2\ell+1/2)}\right)_{s\to 0} = \frac{\Gamma(\ell+1)}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(\ell+\frac{3}{2})\, m^{4\ell}} \int_0^1 dx\, x^{\ell-1} \rho_0(x), \tag{I4}$$

где

$$\rho_0(x) = \left(\rho\left(s, \frac{\tau(s)}{x}\right) s^{-1/2}\right)_{s\to 0}.$$

Поведение $a_\ell^2$ при больших $\ell$ определяется поведением $\rho_0(x)$ при $x \sim 1$. Положим $\rho_0(x) \sim (1-x)^\delta \varkappa$, тогда из (I4) для $a_\ell^2$ при $\ell \to \infty$ получаем

$$a^{\ell}_{\ell\,(\ell\to\infty)} \sim \frac{\varkappa\,\Gamma(\delta+1)}{2\sqrt{\pi}\, m^{4\ell}}\, \ell^{-3/2-\delta}.$$

Сравнивая эту формулу с выражением, следующим из борновского приближения/5/,

$$a_{\ell\,(\ell\to\infty)} \sim -\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\varepsilon+1)\,\sigma_0(m)}{4}\, \frac{\ell^{-\varepsilon-3/2}}{m^{2\ell+1-\varepsilon}},$$

где $\sigma(\mu) = (1-\frac{\mu}{m})^\varepsilon \sigma_0(\mu)$ - юкавская плотность, получим:

$$\delta = \frac{3}{2} + 2\varepsilon, \quad \varkappa = \frac{\pi^{3/2}}{8}\, \frac{\Gamma^2(\varepsilon+1)}{\Gamma(2\varepsilon+\frac{5}{2})}\, \frac{\sigma_0^2(m)}{m^2}.$$

Согласно условию унитарности $Im\, A_\ell(s)$ разлагается на пороге по полуцелым степеням $s$. Предположим, что интеграл в формуле (I3) равномерно сходится при $s\to 0$. Для $\rho(s,t)$ это означает вычисление асимптотики по $t = \frac{\tau(s)}{x}$ и $s \to 0$. Если считать, что $\rho$- функция в этом случае определяется из представления (7), то это приводит к появлению в разложении $Im\, A_\ell(s)$, исключая первый член, степеней $s$, отличных от полуцелых, и тем самым указывает на несогласованность с условием унитарности. Это показывает, что характер порогового поведения существенным образом связан с асимптотикой функции $\rho(s, \frac{\tau(s)}{x})$ вдоль кривой $(s, t = \tau(s)/x)$, которая должна отличаться от асимптотики этой функции при $s =$ фикс и $t \to \infty$.

Литература


I. Blankenbecler R., Goldberger M.L., Khyri N.N., Treiman S.B. - Ann. Phys., 1960, v.10, 62.
2. Нуссенцвейг Х.М. Причинность и дисперсионные соотношения. М.:Мир,1976.
3. Bessis D. - J.Math.Phys., 1965, v.6, 637.
4. Newton R.G. The complex J-plane, Benjamin, 1964.
5. Ситенко А.Г. Лекции по теории рассеяния. Киев: Высшая школа, 1971.



Иркутский государственный университет им.А.А.Жданова



Статья поступила в апреле 1981 г.



УДК 517.564


## ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ


М.Л.Платонов


REPRESENTATIONS OF HYPERGEOMETRICAL FUNCTIONS,


by M.L.Platonov



For the hypergeometrical function, Maclaurin's series are given for each of the variables four on which this function depends. This seems to be done for the first time in terms of the $\gamma$ variable.


В задачах математической физики из всех специальных функций, пожалуй, самой популярной является гипергеометрическая. В данной статье мы рассмотрим разложения гипергеометрической функции в ряды по степеням каждого из параметров, от которых она зависит, - разнообразие разложений может способствовать применениям.

Обобщенные числа Стирлинга второго рода $A_n^k$ которые ниже потребуются, определим как коэффициенты разложения

$$x^n \prod_{i=0}^{n} (1-\alpha_i x)^{-1} = \sum_{k=n}^{\infty} A_n^k x^k, \quad |\alpha_i x| < 1, \qquad n = \overline{0,\infty}. \tag{I}$$

При рассмотрении тождества (I) принято говорить, что числа $A_n^k$ построены на базе $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$, причем подразумевается, что члены базовой последовательности являются элементами некоторого числового поля.

Обычно гипергеометрическая функция представляется в виде ряда по степеням переменной $z$

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \sum_{n=0}^{\infty} [\alpha]_n [\beta]_n \{[\gamma]_n n!\}^{-1} \cdot z^n,$$

где

$$[x]_n = x(x+1)\dots(x+n-1), \qquad x = \alpha, \beta, \gamma.$$