ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 4, № 1
июль
1970

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЙОСТА

И. И. Орлов, Ю. В. Парфенов

В работе изучаются свойства параметрического решения Йоста, являющегося функцией трех переменных. Показано, что обычная функция Йоста и решение Йоста являются граничными значениями единой аналитической функции — параметрического решения Йоста.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе изучаются решения радиального уравнения Шредингера

$$\frac{d^2 f(r,k)}{dr^2}+(k^2-V(r))f(r,k)=0 \tag{1.1}$$

с асимптотическими условиями

$$\lim_{r\to\infty} f(r,\pm k)\,e^{\pm ikr}=1, \tag{1.2}$$

так называемые решения Йоста.

Далее вводится функция

$$E(r,z)=e^{\pm ikr}f(r,\pm k),$$

также называемая решением Йоста и удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2E(r,z)}{dr^2}-z\frac{dE(r,z)}{dr}-V(r)E(r,z)=0, \tag{1.3}$$

с условием на бесконечности

$$\lim_{r\to\infty} E(r,z)=1, \tag{1.4}$$

где

$$z=\pm 2ik.$$

Предполагается, что $V(r)$ представима в виде

$$V(r)=\int_0^\infty \sigma(\alpha)\,e^{-\alpha r}\,d\alpha, \tag{1.5}$$

где $\sigma(\alpha)$ — локально суммируемая функция, модуль которой имеет почти всюду неубывающую непрерывную мажоранту $\rho(\alpha)$, удовлетворяющую неравенствам

$$\int_0^\infty \frac{|\sigma(\alpha)|\,d\alpha}{\alpha^2} \leqslant \int_0^\infty \frac{\rho(\alpha)\,d\alpha}{\alpha^2} = N < \infty, \tag{1.6}$$

$$\int_0^\infty \frac{\rho(\alpha)\,d\alpha}{|x+\alpha|\,|y+\alpha|} \leqslant \frac{N(1+\varepsilon^2)}{\varepsilon^2}, \tag{1.7}$$

где x, y таковы, что $|\arg x| \leqslant \pi - \operatorname{arctg}\varepsilon$, $|\arg y| \leqslant \pi - \operatorname{arctg}\varepsilon$.

2. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЙОСТА

Уравнения (1.3), (1.4) эквивалентны интегральному уравнению

$$E(r,z) = 1 + \frac{1}{z}\int_r^\infty \left(1 - e^{-z(r_1-r)}\right) V(r_1) E(r_1,z)\,dr_1. \tag{2.1}$$

Итерируя уравнение (2.1) с $V(r)$ в форме (1.5), получаем

$$E(r,z) = 1 + \int_0^\infty \frac{\sigma(\alpha_0)}{\alpha_0(\alpha_0+z)} \times$$

$$\times\, e^{-\alpha_0 r}\,d\alpha_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{n}\int_{\alpha_{k-1}}^{\infty} \frac{\sigma(\alpha_k-\alpha_{k-1})}{\alpha_k(\alpha_k+z)}\, e^{-(\alpha_k-\alpha_{k-1})r}\,d\alpha_k\right]. \tag{2.2}$$

Назовем параметрическим решением Йоста следующее выражение:

$$E(r,z,\alpha_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{n}\int_{\alpha_{k-1}}^{\infty} \frac{\sigma(\alpha_k-\alpha_{k-1})}{\alpha_k(\alpha_k+z)}\, e^{-(\alpha_k-\alpha_{k-1})r}\,d\alpha_k. \tag{2.3}$$

Из определения (2.3) непосредственно следует интегральное уравнение для параметрического решения Йоста

$$E(r,z,\alpha) = 1 + \int_\alpha^\infty \frac{\sigma(\alpha_1-\alpha)}{\alpha_1(\alpha_1+z)}\, e^{-(\alpha_1-\alpha)r} E(r,z,\alpha_1)\,d\alpha_1. \tag{2.4}$$

От переменных z и α в параметрическом решении Йоста удобно перейти к симметричным переменным

$$x = \alpha, \qquad y = \alpha + z,$$

тогда вместо (2.4) получаем

$$E(r,x,y) = 1 + \int_0^\infty \frac{d\alpha\,\sigma(\alpha)}{(\alpha+x)(\alpha+y)}\, e^{-\alpha r} E(r, x+\alpha, y+\alpha). \tag{2.5}$$

Можно убедиться, что решение интегрального уравнения (2.5) эквивалентно частному решению неоднородного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2E(r,x,y)}{dr^2} - (x+y)\frac{dE(r,x,y)}{dr} + (xy - V(r))E(r,x,y) = xy, \tag{2.6}$$

которое в интегральной форме имеет вид

$$E(r,x,y)=1+\frac{1}{y-x}\int\limits_{r}^{\infty}\left[e^{-x(r_1-r)}-e^{-y(r_1-r)}\right]V(r_1)E(r_1,x,y)\,dr_1. \quad (2.7)$$

Таким образом, для параметрического решения Йоста установлены интегральные уравнения по различным переменным, а также дифференциальное уравнение по переменной r. Следует подчеркнуть, что функция $E(r, x, y)$ является симметричной функцией переменных x и y.

Итерируя уравнение (2.5), представим параметрическое решение Йоста в виде ряда

$$E(r,x,y)=1+\sum_{n=1}^{\infty}E_n(r,x,y), \quad (2.8)$$

где $E_n(r, x, y)$ — n-я итерация интегрального уравнения (2.5):

$$E_n(r,x,y)=\prod_{k=1}^{n}\int\limits_{\alpha_{k-1}}^{\infty}\frac{\sigma(\alpha_k-\alpha_{k-1})}{(\alpha_k+x)(\alpha_k+y)}e^{-(\alpha_k-\alpha_{k-1})r}\,d\alpha_k. \quad (2.9)$$

В этой формуле обозначено $\alpha_0=0$. С помощью (1.7) для $E_n(r, x, y)$ устанавливается неравенство

$$|E_n(r,x,y)|\leqslant\prod_{k=1}^{n}\int\limits_{\alpha_{k-1}}^{\infty}\frac{|\sigma(\alpha_k-\alpha_{k-1})e^{-(\alpha_k-\alpha_{k-1})r}|}{|\alpha_k+x|\,|\alpha_k+y|}\,d\alpha_k\leqslant$$

$$\leqslant\prod_{k=1}^{n}\int\limits_{\alpha_{k-1}}^{\infty}\frac{\rho(\alpha_k-\alpha_{k-1})}{|\alpha_k+x|\,|\alpha_k+y|}\,d\alpha_k\leqslant\prod_{k=1}^{n}\int\limits_{\alpha_{k-1}}^{\infty}\frac{\rho(\alpha_k)}{|\alpha_k+x|\,|\alpha_k+y|}\,d\alpha_k=$$

$$=\frac{1}{n!}\left[\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\rho(\alpha)}{|\alpha+x|\,|\alpha+y|}\,d\alpha\right]^n\leqslant\frac{N_\varepsilon^n}{n!}, \quad (2.10)$$

откуда для E имеем равномерную оценку

$$|E(r,\ x,\ y)|\leqslant\exp(N_\varepsilon). \quad (2.11)$$

С другой стороны, в силу свойств интеграла типа Коши [1] и равенства

$$E_n(r,x,y)=\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\sigma(\alpha)e^{-\alpha r}}{(\alpha+x)(\alpha+y)}E_{n-1}(r,x+\alpha,y+\alpha)\,d\alpha \quad (2.12)$$

можно убедиться по индукции в том, что слагаемое $E_n(r, x, y)$ является аналитической функцией трех комплексных переменных r, x, y в области

$$D_\varepsilon=\{r,\ x,\ y:\operatorname{Re}r>0,\ |\arg x|<\pi-\varepsilon,\ |\arg y|<\pi-\varepsilon\}. \quad (2.13)$$

В силу равномерной сходимости ряда (2.8) параметрическое решение Йоста $E(r, x, y)$ будет аналитической функцией своих переменных в области D_ε. Тем самым доказана

Т е о р е м а. *Параметрическое решение Йоста $E(r, x, y)$ для $\sigma(\alpha)$, удовлетворяющей условию* (1.6), *является аналитической функцией переменных r, x, y в области D_ε.*

В действительности можно утверждать большее. Например, при x и y, фиксированных в области аналитичности, $E(r, x, y)$ как функция переменной r аналитична при $\operatorname{Re} r > 0$ и непрерывна вплоть до линии $\operatorname{Re} r = 0$. Детали поведения $E(r, x, y)$ по переменной x вблизи отрицательной вещественной оси можно получить, если конкретизировать функцию $\sigma(\alpha)$.

В дальнейшем наибольший интерес представляет поведение $E(r, x, y)$ вблизи точек x и y, равных нулю. Для этого оценим E при $\operatorname{Re} x \geqslant 0$ и $\operatorname{Re} y \geqslant 0$. Имеем неравенства

$$|E_n(r, x, y)| \leqslant \frac{1}{n!}\left[\int_0^\infty \frac{\rho(\alpha)}{|\alpha + x|\,|\alpha + y|}\,d\alpha\right]^n \leqslant \frac{1}{n!}\left[\int_0^\infty \frac{\rho(\alpha)\,d\alpha}{\alpha^2}\right]^n = \frac{N^n}{n!} \tag{2.14}$$

и

$$|E(r, x, y)| < e^N,$$

которые показывают, что $E(r, x, y)$ — непрерывная функция по переменным x, y в точке $x = 0$ и $y = 0$.

В силу непрерывности по x параметрическое решение Йоста связано следующим соотношением с решением Йоста:

$$E(r, x) = E(r, x, 0) = \lim_{y \to 0} E(r, x, y) =$$

$$= 1 + \int_0^\infty \frac{\sigma(\alpha)}{\alpha(\alpha + x)}\,e^{-\alpha r} E(r, \alpha + x, \alpha)\,d\alpha. \tag{2.15}$$

Параметрическое решение Йоста E будет аналитической функцией и при более слабых ограничениях на $\sigma(\alpha)$. Например, в случае, когда $\sigma(\alpha)$ — обобщенная функция с точечным носителем.

Иркутский государственный университет

Поступила в редакцию 10 ноября 1969 г.

Литература

[1] И. И. П р и в а л о в. Граничные свойства аналитических функций, Гостехиздат, 1950.

PARAMETRICAL JOST SOLUTION

I. I. Orlov, Yu. V. Parfenov

Properties of the parametrical Jost solution depending on three variables are studied. The usual Jost function and Jost solution are shown to be boundary values of the parametrical Jost solution as the unique analytical function.